

限定なし



擾乱測定・評価マニュアル

2026年3月30日 B改訂
(2010年7月28日 初版制定)

宇宙航空研究開発機構

免責条項

ここに含まれる情報は、一般的な情報提供のみを目的としています。JAXA は、かかる情報の正確性、有用性又は適時性を含め、明示又は黙示に何ら保証するものではありません。また、JAXA は、かかる情報の利用に関連する損害について、何ら責任を負いません。

Disclaimer

The information contained herein is for general informational purposes only. JAXA makes no warranty, express or implied, including as to the accuracy, usefulness or timeliness of any information herein. JAXA will not be liable for any losses relating to the use of the information.

発行

〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1

宇宙航空研究開発機構 安全・信頼性推進部

JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency)

目 次

1	目的	1
2	範囲	1
3	関連文書	3
4	用語の説明	3
5	擾乱測定・評価の一般手順	4
6	擾乱モデル	6
6.1	擾乱モデル作成基準	6
6.2	擾乱の分類	6
6.3	表現手法	8
6.3.1	周波数領域表現（スペクトル表現）	9
6.3.2	時間領域表現	14
6.3.3	力学モデル表現	17
6.3.4	統計量表現	19
6.3.5	パラメータ変動量の扱い	21
6.4	衛星システムと擾乱源とのインタフェース	22
7	擾乱の測定	26
7.1	測定方法	26
7.2	測定装置	28
7.2.1	直接法に基づく測定装置	28
7.2.2	間接法に基づく測定装置	42
7.3	測定条件	48
7.3.1	ノイズ	48
7.3.2	運転条件	49
8	信号解析	51
8.1	信号解析手法	51
8.2	データ処理手順	52
9	擾乱モデル作成	56
9.1	一般	56
9.2	擾乱モデル例	57
10	事例集	61
10.1	ホイール	62
10.1.1	機器概要	62
10.1.2	擾乱要求項目と擾乱管理作業	64
10.1.3	擾乱要求項目別の測定・評価方法	75
10.1.4	留意事項	82

10.2 IRU（機械式ジャイロ）	83
10.2.1 機器概要	83
10.2.2 擾乱要求項目と擾乱管理作業	87
10.2.3 擾乱要求項目別の測定・評価方法	93
10.2.4 留意事項	97
10.3 冷凍機（機械式）	98
10.3.1 機器概要	98
10.3.2 擾乱要求項目と擾乱管理作業	101
10.3.3 擾乱要求項目の測定・評価方法	101
10.3.4 留意事項	107
10.4 パドル駆動機構	108
10.4.1 機器概要	108
10.4.2 擾乱要求項目と擾乱管理作業	110
10.4.3 擾乱要求項目の測定・評価方法	110
10.4.4 留意事項	128
付録－Ⅰ 擾乱応答の推定理論	129
付録－Ⅱ 動質量に関する補足	134
付録－Ⅲ 6軸動力計を使った測定方法の補足	154
付録－Ⅳ バネ吊りテーブルを使った測定方法の補足	159
付録－Ⅴ ホイール擾乱 力学モデルの補足	160
付録－Ⅵ スペクトル解析	167
Ⅵ.1 スペクトル解析	167
Ⅵ.1.1 フーリエ級数	167
Ⅵ.1.3 相関関数とスペクトル	169
Ⅵ.1.4 離散フーリエ変換（DFT）	171
Ⅵ.1.5 スペクトル計算	172
Ⅵ.2 スペクトル解析プログラム例	176

1 目的

人工衛星には各種の擾乱源が搭載され、指向精度・安定度要求が高まる中、擾乱管理が必要不可欠のものとなりつつある。しかしながら、擾乱管理の基礎となる擾乱源の擾乱測定方法、測定データの整理方法はメーカー、機関で個別の方法が採用されているのが実情であり、擾乱解析、擾乱要求との対照において一貫性、精密性を損なう例も見られる。

そこで本マニュアルでは、JAXA 設計標準における第3階層文書である擾乱管理標準(JERG-2-152A)、および第4階層文書である擾乱管理マニュアル(JREG-2-152-HB101C)を補足するものとして、擾乱源(擾乱発生機器)を対象とする擾乱測定、及び取得した測定データの整理・評価(モデルベースによる整理・評価)についての標準的な考え方、手法を示し、系統立てた擾乱管理に資することを目的としている。

2 範囲

本マニュアルが対象とする業務は、擾乱管理機器と識別された擾乱源(擾乱発生機器)について、擾乱測定、及び取得したデータの整理・評価(モデルベースによる整理・評価)に係る業務とし、主要な読者として、擾乱源(擾乱発生機器)の調達もしくは開発に携わる技術者を対象としている。

従って、衛星構体を介した擾乱伝搬試験、擾乱感受機器への影響評価等のシステムレベルの擾乱測定・評価は対象外とする。なお、システムレベルの擾乱測定・評価については、擾乱管理マニュアル(JREG-2-152-HB101C)で扱われる。

図 2.1-1 に、擾乱管理業務全般(擾乱管理標準(JERG-2-152A)にて規定)の中での本マニュアルの対象業務範囲を示す。このうち、「擾乱解析」業務の一環として、擾乱源(擾乱発生機器)について以下の業務を対象とする。

- ・ 擾乱モデル表現手法の選定
- ・ 擾乱測定(信号処理含む)
- ・ 擾乱モデル作成

ここで、擾乱モデルとは擾乱源が発生する擾乱の特徴量(振幅、周波数、位相等)を表現した数学モデルを意味する。

システムが実施する擾乱解析、及び、擾乱源の擾乱要求仕様の設定などに用いる。

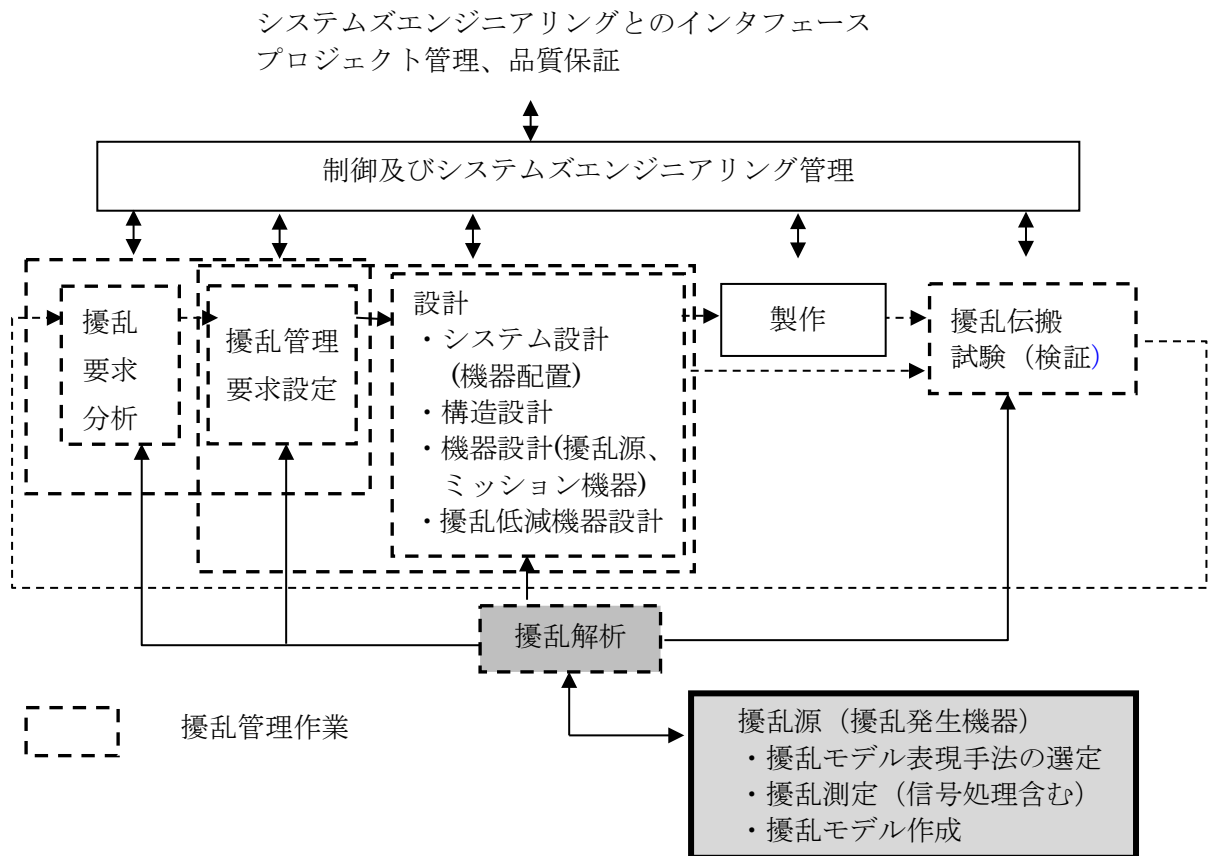


図 2.1-1 擾乱管理業務全般と本マニュアル対象業務
 上図は擾乱管理標準(JREG-2-152A) 2.4 項「擾乱管理の内容」より抜粋

3 関連文書

- (1) JREG-2-152A 擾乱管理標準
 (2) JREG-2-152-HB101C 擾乱管理マニュアル

4 用語の説明

以下章で頻出する用語を以下に説明する。

擾乱	micro vibration、disturbance、g-jitter
擾乱力	衛星の指向に影響を及ぼす並進力とトルクの総称（擾乱トルクとの併記の場合には並進力3成分のみを表す）
擾乱トルク	衛星の指向に影響を及ぼすトルク3成分
内部擾乱	擾乱力の中で発生源が衛星内部にあるもの
擾乱源	擾乱力を発生する機器
擾乱伝達特性	伝達関数や伝達力により擾乱の伝達の特徴を示す一般的用語
擾乱伝達関数	擾乱力とミッション部の物理量（変位、加速度あるいは指向角など）との周波数応答関数
擾乱伝達率	擾乱伝達関数の絶対値
擾乱モデル	擾乱源が発生する擾乱の特徴量（振幅、周波数、位相等）を表現した数学モデル

5 擾乱測定・評価の一般手順

擾乱源（擾乱発生機器）の擾乱測定・評価に係る一般的な手順を図 5-1 に示す。

擾乱測定・評価作業は、システムからの擾乱管理要求に従い実施される。

但し、必ずしもすべての搭載機器について擾乱モデルの作成が必要なわけではない。擾乱管理項目もしくは擾乱管理機器に識別されているか、発生擾乱量がシステムの機能性能に影響を与えるものかどうかにより判断される。擾乱モデル作成要否の判断基準については、6. 1 項で説明する。

擾乱測定・評価作業の最終的なアウトプットは、擾乱モデルの作成である。

擾乱モデルの作成に当たりまず行うことは、擾乱モデルの表現手法の選定である。擾乱の測定内容やデータ整理方法は、この擾乱モデルの表現手法に依存する。

擾乱モデルの表現手法には、時間領域表現、周波数領域表現、力学モデル表現、及び、統計量表現などいくつかの手法が存在する。発生擾乱の特性（定常／非定常、線スペクトル的／連続スペクトル的、回転数等の使用条件の依存性など）、及び、システムで行う擾乱解析の手法を考慮して選定する。

擾乱モデルの表現手法が選定できれば、擾乱モデルに応じたパラメータ、統計量を抽出するのに適した測定手法・測定条件、データ解析手法を検討し、擾乱測定／データ解析を実施する。

擾乱モデルは、表現手法とパラメータセットの形式でシステムに引き渡され、システム側での擾乱解析に資する。擾乱解析結果に応じて、擾乱源の擾乱管理要求（擾乱要求仕様など）の見直しが行われる。また、フライトモデルについて擾乱性能評価が要求される場合、同じ擾乱測定／データ解析を通して、パラメータ、統計量を抽出し、擾乱モデルとの比較を行う。

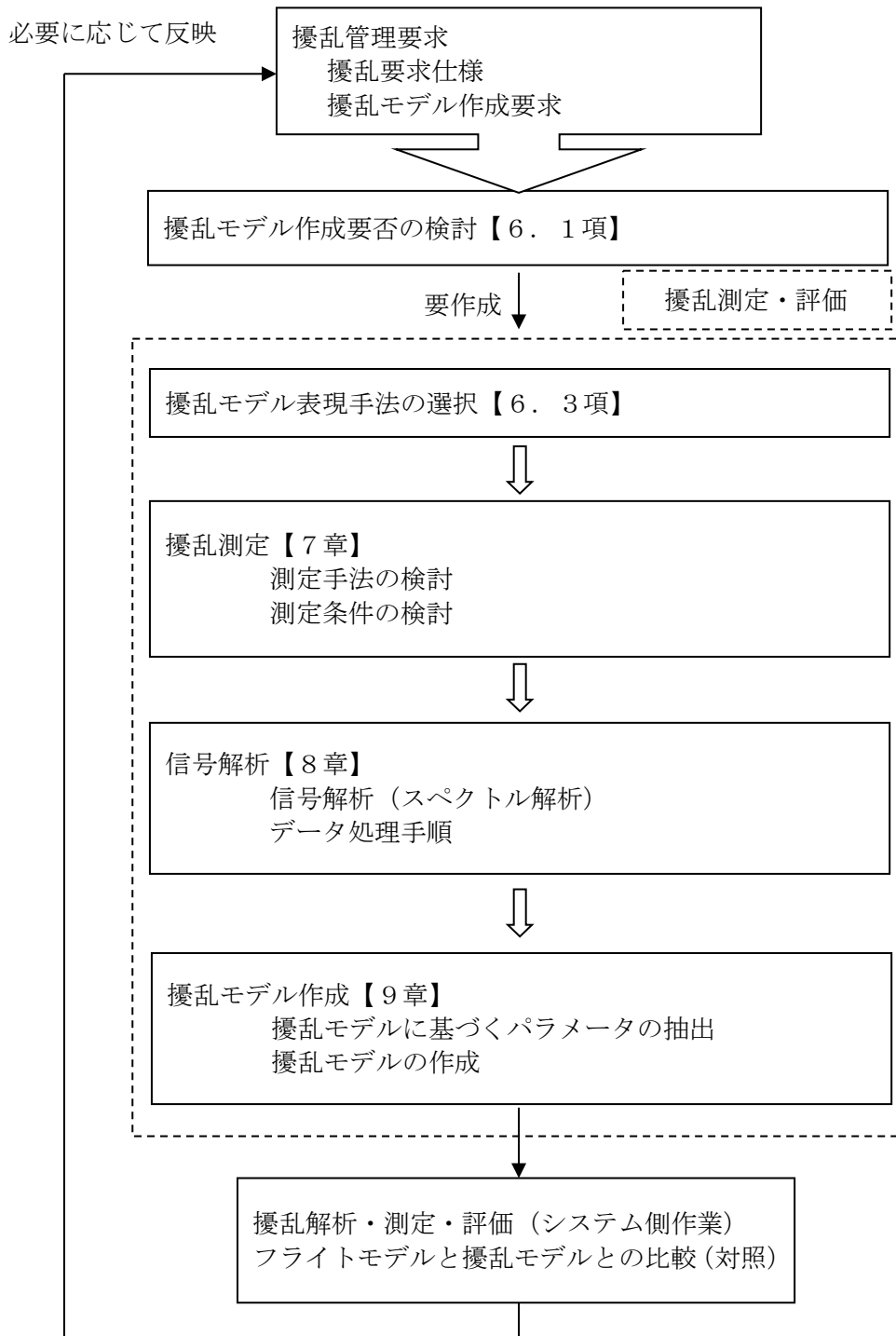


図 5-1 擾乱測定・評価作業フロー

6 擾乱モデル

本章では、擾乱モデルの表現手法の解説を行う。

まず、必ずしもすべての搭載機器について擾乱モデルの作成が必要なわけではない。本章の最初に擾乱モデル作成が必要となる基準を示す。

6.1 擾乱モデル作成基準

擾乱モデルを作成するかどうかはシステムとの調整によるが、基本的に以下の基準に従って判断するものとする。

【擾乱モデル作成基準】

- (1)システム概念・基本設計フェーズの擾乱要求分析において、擾乱管理項目もしくは擾乱管理機器に設定された擾乱源である。
- (2)擾乱要求分析に資するデータが存在せず、またその擾乱レベルが衛星システムの主要な特性に影響（姿勢制御・指向誤差、構造系・制御系との干渉、ミッション機器への影響など）すると判断される。

6.2 擾乱の分類

衛星や衛星内部の要素に働く力は図 6.2-1 のように分類できる。衛星の姿勢やミッション機器の機能、性能（指向精度等を含む）を変化させ、衛星内の微小振動環境に影響を及ぼす内力のうち、意図した制御力・制御トルク以外のものを内部擾乱（internal disturbance、略して擾乱）と定義する。ここで内力とは衛星内の要素間で相互に働く力とトルクの総称である。

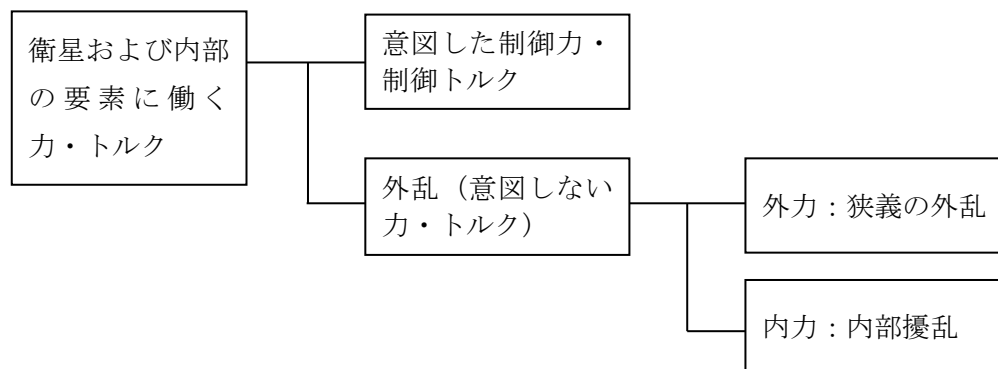


図 6.2-1 擾乱の定義

内部擾乱は衛星内部の質量が移動することによって発生する。その擾乱は図 6.2-2 のように定常擾乱と非定常擾乱に分けられる。代表的な擾乱源(擾乱発生機器)を以下に説明する。

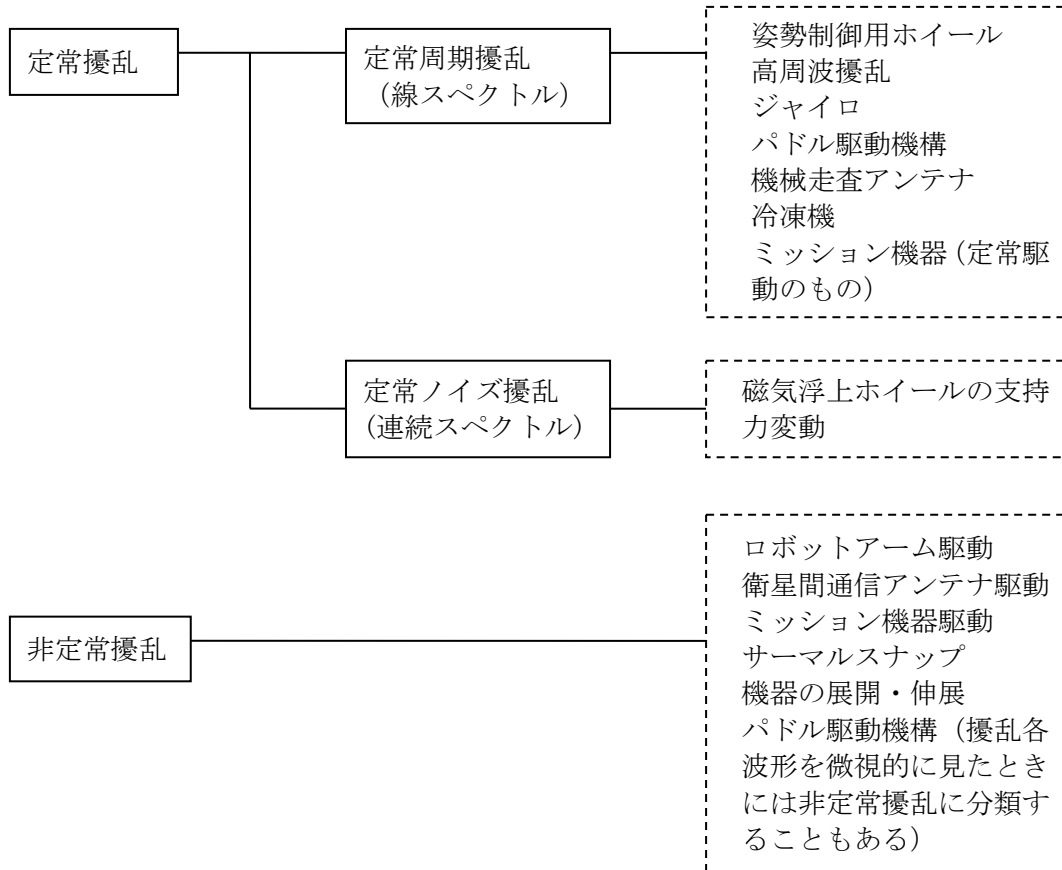


図 6.2-2 内部擾乱の分類と主要擾乱源

6.3 表現手法

擾乱モデルの表現手法には、以下に示すいくつかの手法が存在する。表 6.3-1 に各表現手法の特徴、表現に適した擾乱タイプ、代表的な表現パラメータをそれぞれ示す。

- ・ 周波数領域表現（スペクトル表現）
- ・ 時間領域表現
- ・ 力学モデル表現
- ・ 統計量表現

システム側で実施する擾乱解析に求められる表現手法、擾乱源が発生する擾乱の特性を踏まえ、システム側と調整して表現手法を選択することになる。

表 6.3-1 各種表現手法の特徴

表現手法	特徴	表現に適した擾乱タイプ	表現パラメータ
周波数領域表現（スペクトル表現） ・ 線スペクトル ・ 連続スペクトル	<ul style="list-style-type: none"> ・ 周波数別に擾乱レベルが明示され擾乱要求の仕様化、また設計にも利用しやすい。 ・ 伝達関数等の伝達モデルと相性が良い。 ・ 非定常、非周期的な擾乱の取り扱いが難しい。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 定常 ・ 周期的擾乱 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 振幅スペクトル ・ 位相スペクトル ・ パワースペクトル密度 ・ エネルギースペクトル ・ パワー
時間領域表現 ・ 正弦波の重ね合せ ・ 自己相関関数ほか ・ 時間波形（インパルス、矩形波、台形波等）	<ul style="list-style-type: none"> ・ 定常／非定常（過渡的）、周期的／非周期的な擾乱も表現可能である。 ・ 擾乱解析、設計への利用が比較的難しい。 	一般	<ul style="list-style-type: none"> ・ 周波数（周期） ・ 係数 ・ 時間波形 ・ 時間波形の特徴量（インパルスの高さと間隔、矩形波の高さと幅、台形波の高さと幅・立ち上がり・立ち下がり幅、等）
力学モデル表現 ・ マスバランス表現 ・ 運動方程式	<ul style="list-style-type: none"> ・ 設計、使用条件の変更に対し変更の影響が予測できる。 ・ 擾乱発生メカニズムを解明する必要がある。 	発生メカニズムが明らかな擾乱	<ul style="list-style-type: none"> ・ マスバランス ・ 共振周波数／共振倍率ほか物理パラメータ
統計量表現	<ul style="list-style-type: none"> ・ データ処理が他の表現手法と比較して容易である。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 定常 ・ 周期的擾乱 ・ ランダム（不規則）擾乱 	統計量（平均値、標準偏差など）

以降、各表現手法の詳細を 6.3.1 項から 6.3.4 項にて解説する。また、パラメータを提示する際には、測定毎のバラツキ、製品の製造バラツキなどの変動量に注意を払う必要がある。変動量の扱いについては 6.3.5 項にて触れる。

6.3.1 周波数領域表現（スペクトル表現）

擾乱源の擾乱レベルを定量的にモデル化する方法として、スペクトルによる表現が用いられる。ここでは、スペクトルによる擾乱のモデル化について記述する前に、まず、各種スペクトルの定義について簡単にまとめる。

6.3.1.1 スペクトルの定義

(1) 振幅スペクトル

時刻暦データ $x(t)$ は、式(6.3.1.1-1)に示すように、複素フーリエ成分 $X(f)$ とフーリエ変換の関係となっている。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (6.3.1.1-1)$$

この複素フーリエ成分 $X(f)$ を、その絶対値 $|X(f)|$ と偏角 $\theta(f)$ を用いて、次のように示すことができる。この $\theta(f)$ は、周波数 f の波の位相と同様である。

$$X(f) = |X(f)|e^{i\theta(f)} \quad (6.3.1.1-2)$$

この複素フーリエ成分 $X(f)$ の絶対値 $|X(f)|$ を $A(f)$ として、この $A(f)$ と周波数 f との関係を示したものを振幅スペクトルと定義する。この振幅スペクトルは、フーリエスペクトル、また、リニアスペクトルとも呼ばれる。なお、単位は、[U/Hz]で表される。

上記の振幅スペクトル $A(f)$ は、 $(-\infty, \infty)$ の周波数領域で定義されるため両側振幅スペクトル (Two-side Spectrum) と呼ぶこととする。一方、時刻暦データ $x(t)$ が実関数であることを考慮すると、式(6.3.1.1-3)に示すように $(0, \infty)$ の周波数領域のみでも記述できる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|e^{i(2\pi ft + \theta_f)} df = \int_{-\infty}^0 |X(f)|e^{i(2\pi ft + \theta_f)} df + \int_0^{\infty} |X(f)|e^{i(2\pi ft + \theta_f)} df \\ &= 2 \int_0^{\infty} |X(f)| \cos(2\pi ft + \theta_f) df \end{aligned} \quad (6.3.1.1-3)$$

この $(0, \infty)$ の周波数領域のみで定義される振幅スペクトル $A_o(f)$ を片側振幅スペクトル (One-side Spectrum) と呼ぶこととする。添え字の O は、One-side を意味する。この関係式から、この両側振幅スペクトルと片側振幅スペクトルは以下のような関係となる。

$$A_o(f) = 2A(f) \quad (6.3.1.1-4)$$

なお、実際に振幅スペクトルを算出する場合には、定義域を f の $(0, \infty)$ に限る方が自然であり、擾乱モデルを作成する場合には、片側振幅スペクトルで定義することを推奨する。

(2) 位相スペクトル

一般に、複素フーリエ成分から振幅スペクトルを算出する際に、同時に求められる偏角 $\theta(f)$ と周波数 f との関係を位相スペクトルという。ただし、偏角 $\theta(f)$ は、確率変数であるので、 $\theta(f)$ そのものの期待値ではなく、式(6.3.1.1-5)に示すように各周波数成分の偏角の相対偏角 $\Delta\theta(f)$ で定義することが望ましい。

$$\Delta\theta(f) = \theta(f) - \theta(f_b) \quad (6.3.1.1-5)$$

なお、 f_b は、相対偏角を算出する際の基準周波数である。この基準周波数については、パワースペクトル密度関数の最大値などを用いることも可能である。相対偏角の周波数応答関数 $\Delta\theta(f)$ を位相スペクトルとした場合には、次のようになる。

$$\Delta\theta(f) = \tan^{-1} \left\langle \frac{\text{Im}\{X(f)X^*(f_b)\}}{\text{Re}\{X(f)X^*(f_b)\}} \right\rangle \quad (6.3.1.1-6)$$

(3) エネルギースペクトル

式(6.3.1.1-4)で示すフーリエ積分により求められる複素フーリエ成分 $X(f)$ の振幅成分 $|X(f)|$ を二乗した $|X(f)|^2$ ($=X(f) \cdot X^*(f)$)を、周波数 f の波の強さ(エネルギー)と定義する。各周波数成分波のエネルギー $|X(f)|^2$ と周波数 f との関係をエネルギースペクトルという。

(4) パワースペクトル密度

先に述べたエネルギースペクトルの単位時間当たりの平均エネルギーを用いてパワースペクトル密度 $P(f)$ は、次のように定義される。また、このパワースペクトル密度は、単に、パワースペクトルとも呼ばれる。単位は、 $[U^2/\text{Hz}]$ 、 $[U/\sqrt{\text{Hz}}]$ などである。

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |X(f)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} X(f) \cdot X^*(f) \right] \quad (6.3.1.1-7)$$

とする。一方、パワースペクトル密度 $P(f)$ は、自己相関関数との間で、フーリエ変換とフーリエ逆変換の関係がある。これは、ウィーナー・ヒンチン (Wiener-Khinchin) の公式とよばれている。この関係式から次のような自己相関関数で示すこともできる。

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (6.3.1.1-8)$$

上記のパワースペクトル密度 $P(f)$ は、 $(-\infty, \infty)$ の周波数領域で定義されるため両側スペクトル密度 (Two-side Spectral Density Function) と呼ばれる。これに対して、 $(0, \infty)$ の周

波数領域で定義されるパワースペクトル密度 $E(f)$ を片側スペクトル密度（**One-side Spectral Density Function**）と呼ぶ。この両側スペクトル密度と片側スペクトル密度は次のような関係となる。

$$E(f) = 2P(f) \quad (6.3.1.1-9)$$

なお、実際にパワースペクトル密度を算出する場合には、定義域を f の $(0, \infty)$ に限る方が自然であり、擾乱モデルを作成する場合には、片側スペクトル密度で定義することを推奨する。

(5) 平均パワーと特定周波数域のパワー

(4)のパワースペクトル密度の単位は $[U^2/Hz]$ 、 $[U/\sqrt{Hz}]$ であるため、このままでは擾乱量の集計等に扱い難いため、以下のように周波数で積分して、平均パワー、もしくは特定周波数域のパワーに変換することが多い。また、後者は、線スペクトルが擾乱周波数のバラツキ、もしくはスペクトル計算誤差により、ノミナル周波数からある周波数間隔で拡散したスペクトルを集計することも意図している。

時刻暦データ $x(t)$ が不規則変動であることを考えると、平均パワー P_{ave} は次式で与えられ、単位は、 $[U^2]$ である。

$$P_{ave} = \int_0^{\infty} E(f)df \quad (6.3.1.1-10)$$

これは、片側パワースペクトル密度 $E(f)$ を正方向の全周波数区間について積分したものと等価となっている。このうち、特定周波数 f_1 と f_2 の間（ただし、 $\Delta f = f_2 - f_1$ ）に含まれる成分の波がもつパワーは、その帯域のパワースペクトル密度と Δf を用いて、以下のように記述できる。

$$P_s(f_1 < f < f_2) = \int_{f_1}^{f_2} E(f)df \cong E\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) \Delta f \quad (6.3.1.1-11)$$

なお、この特定周波数域のパワーの正の平方根は、時系列データのR.M.S.値である。

6.3.1.2 スペクトルによる擾乱のモデル化

(1) 線スペクトル

線スペクトルは、定常周期の擾乱に対して、有効な表現方法である。別の表現では、離散スペクトルとも呼ばれる。擾乱成分 T_D の線スペクトルは、基本式として有限個の離散擾乱周波数 (f_1, f_1, \dots, f_n) の正弦波状擾乱の和として、次のように示すことができる。

$$T_D(t) = \sum_{k=1}^n T_{Dk}(t) = \sum_{k=1}^n A_{Dk} \sin(2\pi f_k t + \varphi_k) \quad (6.3.1.2-1)$$

ここに、

$$T_{Dk}(t) = A_{Dk} \sin(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

A_{Dk} : 周波数 f_k の擾乱振幅[N or Nm]

φ_k : 周波数 f_k の擾乱位相[rad]

一般に、線スペクトルは、基本周波数とその整数倍としてフーリエ級数展開できるものもあるが、本マニュアルで扱うような擾乱源の評価で用いる場合、線スペクトルは、2つ以上の無関係な周波数成分が重畳された現象も含まれるため、必ずしも擾乱周波数 f_k とその整数倍とならないことに注意が必要である。

以下に注意事項について列挙する。

- ・ 擾乱振幅 A_{Dk} のみが与えられ、位相 φ_k について規定しない（またはできない）場合が多い。ただし位相が規定できる場合には、当然与えたほうが良い。
- ・ 短い時間スケールで見るとほぼ正弦波と見なせるような波形でも、少し時間が経過すると振幅が変化する場合もあり、そのような場合には、規定値が最悪の時間帯における0-p値であるのか、時間変動も確率分布に取り込んで設定した 3σ 値であるのか、等を明確にする必要がある。

線スペクトルの例として、慣性基準装置擾乱データを図 6.3.1.2-1 に示す。

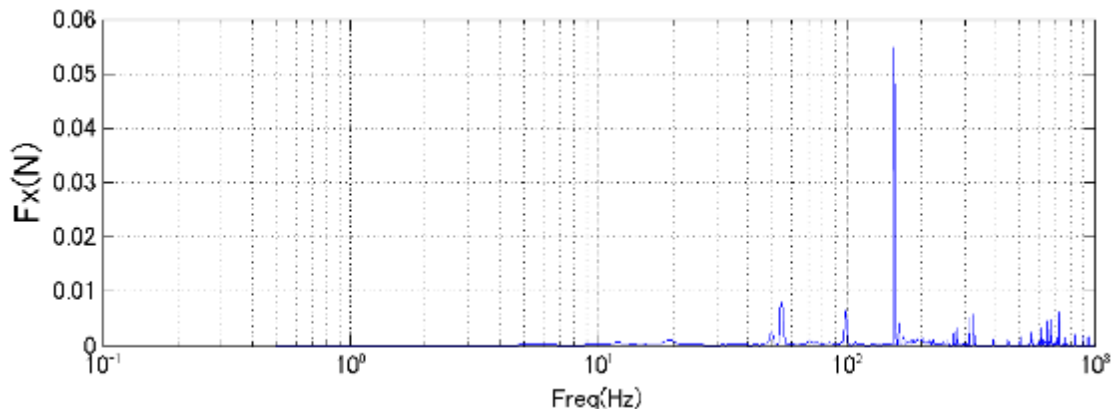


図 6.3.1.2-1 線スペクトルの例

(2) 連続スペクトル

連続スペクトルは、定常ノイズ擾乱をモデル化する場合に有効な表現方法である。連続スペクトルは、基本的には、擾乱成分 T_D の一方向 (=片側) パワースペクトル密度 $P(f)$ 、パワー $P_s(f)$ 、もしくは、振幅スペクトル $A_o(f)$ で示すことが有効である。単位は、パワースペク

トルの場合には、 $[N^2/Hz]$ もしくは、 $[Nm^2/Hz]$ 、パワーの場合には、 $[N^2]$ 、 $[Nm^2]$ 、振幅スペクトルの場合には、 $[N]$ 、 $[Nm]$ で表すものとする。連続的な時間波形に対する上記スペクトルの定義は、すでに 6.3.1.1 項で記述したとおりである。

以下に注意事項について列挙する。

- ・ 擾乱源によっては、時間帯による擾乱振幅が変化する発生する場合もあり、注意深くデータを確認する必要がある。また、その場合には、規定値が最悪の時間帯であるか等を明確にする必要がある。
- ・ 連続スペクトルをパワースペクトル、パワー、振幅スペクトル等で表現した場合、各擾乱周波数間の位相関係が無視されるため、指向誤差の解析精度に制約が生じる。そのため、周波数間の位相関係を 6.3.1.1(2)項で記述した位相スペクトルを用いて、振幅だけではなく、位相情報もモデル化するとよい。

連続スペクトルの典型例として、実測波形のホイールの擾乱を図 6.3.1.2-2 に示す。

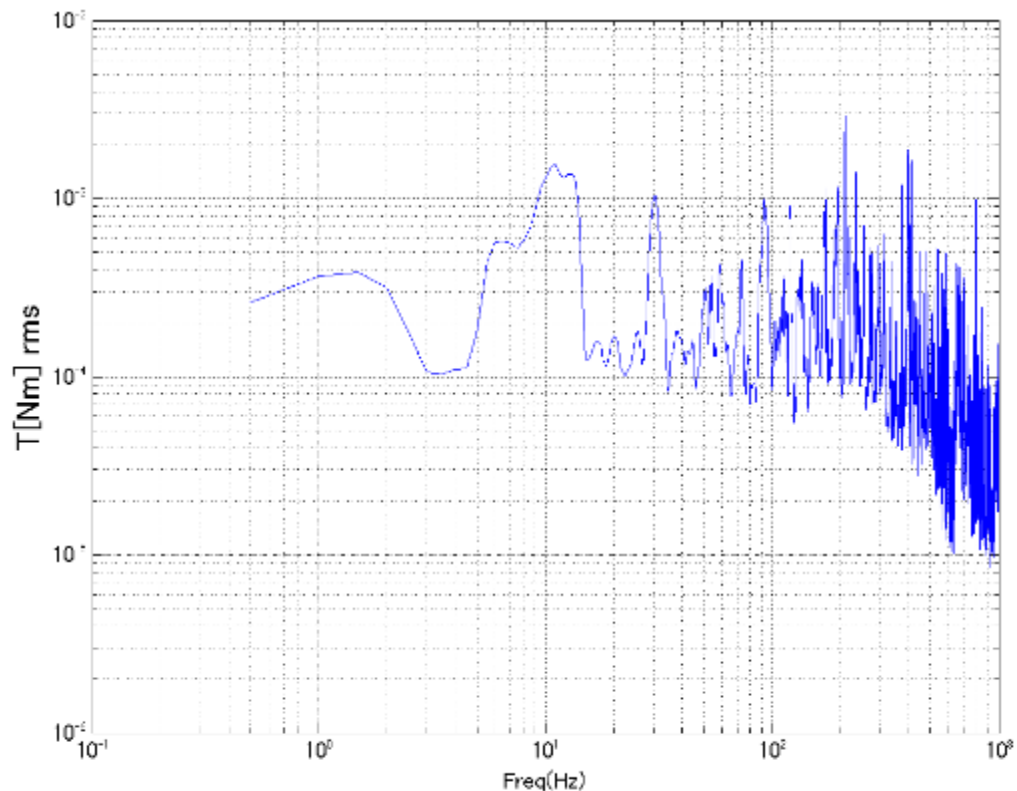


図 6.3.1.2-2 連続スペクトルの例 (ホイール)

縦軸単位 $[Nm]rms$: 特定周波数域でのパワー (6.3.1.1(5)項参照)

6.3.2 時間領域表現

衛星の擾乱管理において、擾乱源が発する擾乱のモデル化を時間領域表現により行うことが必要とされるケースとしては、以下のようなものが考えられる。

- ・ 定常擾乱であるが、「単一擾乱源であっても分布的なスペクトル（単一でない線スペクトルや連続スペクトル等）の性質を持つ擾乱源が存在する場合」について、（周波数領域表現では一意に擾乱要求を規定できないため）周波数領域での擾乱管理が難しいケース
- ・ 定常擾乱であるが、「複数の擾乱源が存在する場合」について、（周波数領域表現では一意に擾乱要求を規定できないため）擾乱量の総和を時間領域表現により評価及び管理する必要があるケース
- ・ 非定常擾乱であり、周波数領域での擾乱管理が難しいケース

<級数和表現>

定常擾乱の内、擾乱特性が線スペクトルである場合には、擾乱源が発する擾乱力（並進力または衛星全機重心回りに発生するトルク） f は次のような時間領域表現の形で定義できる。

$$f(t) = \sum_i A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (6.3.2-1)$$

ここで、

- A_i : 内部擾乱源の*i*次の擾乱力振幅[N or Nm]
- ω_i : 内部擾乱源の*i*次の擾乱固有振動数[rad/s]
- φ_i : 内部擾乱源の*i*次の擾乱位相[rad]

また、任意の周期波形はフーリエ級数展開により、正弦波と余弦波の成分に分解できるところから、その他の定常擾乱が周期*T*の逆数を基本周波数として、その整数倍の周波数

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

の振動成分しか含まない場合、それらの擾乱力 f は次のような時間領域表現（フーリエ級数）の形で定義できる^[6.1]。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\} \quad (6.3.2-2)$$

ここで、

$$a_n = \frac{T}{2} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{T}{2} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

非定常擾乱の場合には、時間関数として擾乱を表現することは容易でなくなるため、次のような方法が用いられる。

<理想波形近似表現>

擾乱時間波形（擾乱力・トルク、あるいはこれを1階積分した擾乱運動量・角運動量など）をある仮定をもって理想波形に近似しても良い。

擾乱がステップ関数、インパルス関数、ランプ関数等で近似できる場合は、ステップ応答、インパルス応答、ランプ応答として評価される。

$$\text{ステップ } f(t) = a_{step}h(t)$$

$$\text{インパルス } f(t) = a_{impulse}\delta(t)$$

$$\text{ランプ } f(t) = a_{ramp}t$$

ここで、

$h(t)$: ヘビサイド関数

$\delta(t)$: デルタ関数

また、ステッピングモータの擾乱評価では、簡単のため、モータに対して慣性負荷として作用する可動部の有効質量とモータトルクなどから（エネルギー的に等価な）矩形波として擾乱力の時間波形を近似的に表現する。

<擾乱時間波形>

擾乱源機器に分界点における擾乱の時間波形として表現する。

基本的には波形のほか、最大値、最大の変化率等の統計量表現が併用される。

時系列データを衛星ダイナミクスモデルに組み込んで数値シミュレーションによりその影響を評価する。

太陽電池パドル駆動機構やアンテナ駆動機構に用いられるステッピングモータの擾乱実波形を図 6.3.2-1～6.3.2-3 に示す。

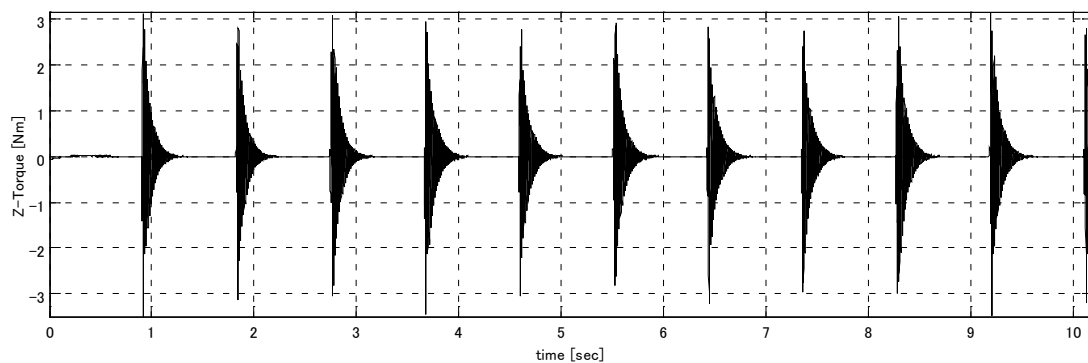


図 6.3.2-1 ステッピングモータ擾乱トルクの時間波形
[1PPS 駆動時、実験データ] [6.1]

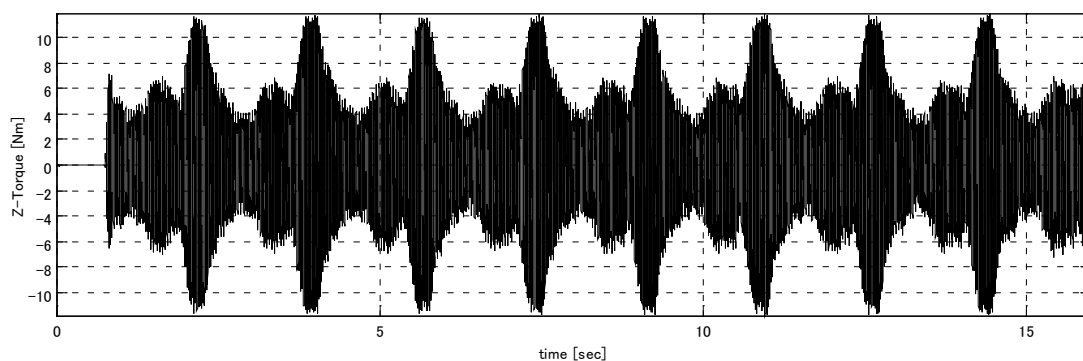


図 6.3.2-2 ステッピングモータ擾乱トルクの時間波形
[69PPS(=波動歯車装置のギアの固有振動数)駆動時、実験データ] [6.1]

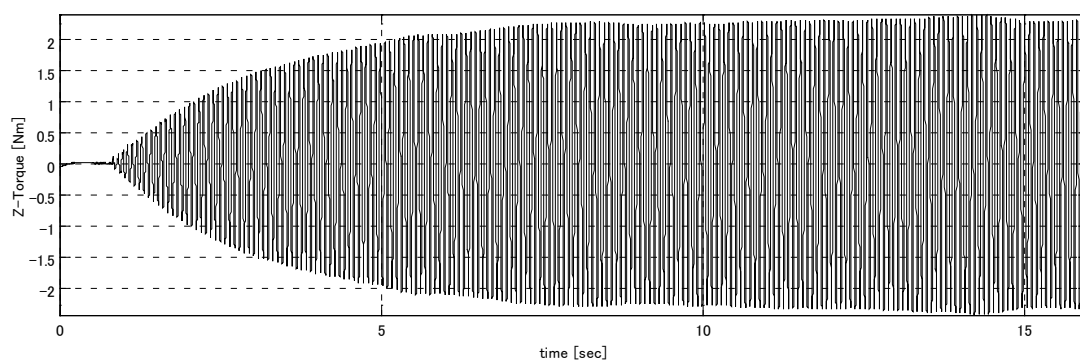


図 6.3.2-3 テッピングモータ擾乱トルクの時間波形
[13.4PPS(=柔軟固定具の固有振動数)駆動時、実験データ] [6.1]

6.3.3 力学モデル表現

擾乱発生メカニズムに基づき、物理量をパラメータとした表現手法である。

代表的な例を図 6.3.3-1 及び図 6.3.3-2 に示す。

図 6.3.3-1 は、10.1 項事例にも示すホイールのマスインバランスに起因する擾乱、及びマスインバランスに起因する擾乱がロータを支持するホイール構造との機械共振により増幅されることを表現する力学モデルである。（力学モデルの詳細は付録 - I に示す。）

同例において、擾乱特性を表わすパラメータは、ロータ部質量 (M)、ロータ部のマスインバランス (m_s 、 m_d)、ロータを支持する構造特性を示す剛性 (k)、減衰 (c) が該当する。

図 6.3.3-2 は、太陽電池パドル駆動機構やアンテナ駆動機構に用いられるステッピングモータ及び波動歯車装置のギアの擾乱モデルである。力学モデルと実験結果の比較を図 6.3.3-3 に示す^[6.1]。ステッピングモータ、波動歯車装置のギアは、それぞれモータ駆動軸の駆動プロファイル、バネ・ダンパモデルにて表現している（原理まで遡った力学モデルは構築していない）。任意の駆動プロファイルを入力とした擾乱トルクの時間波形が解析的に得られる。

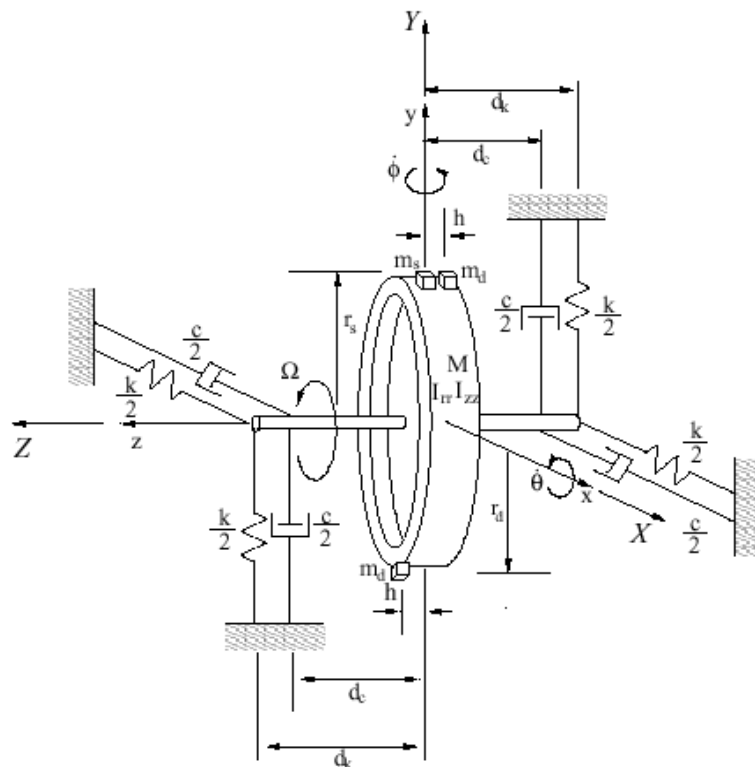


図 6.3.3-1 力学モデルの一例（ホイール擾乱モデル）^{[6.2][6.3][6.4]}

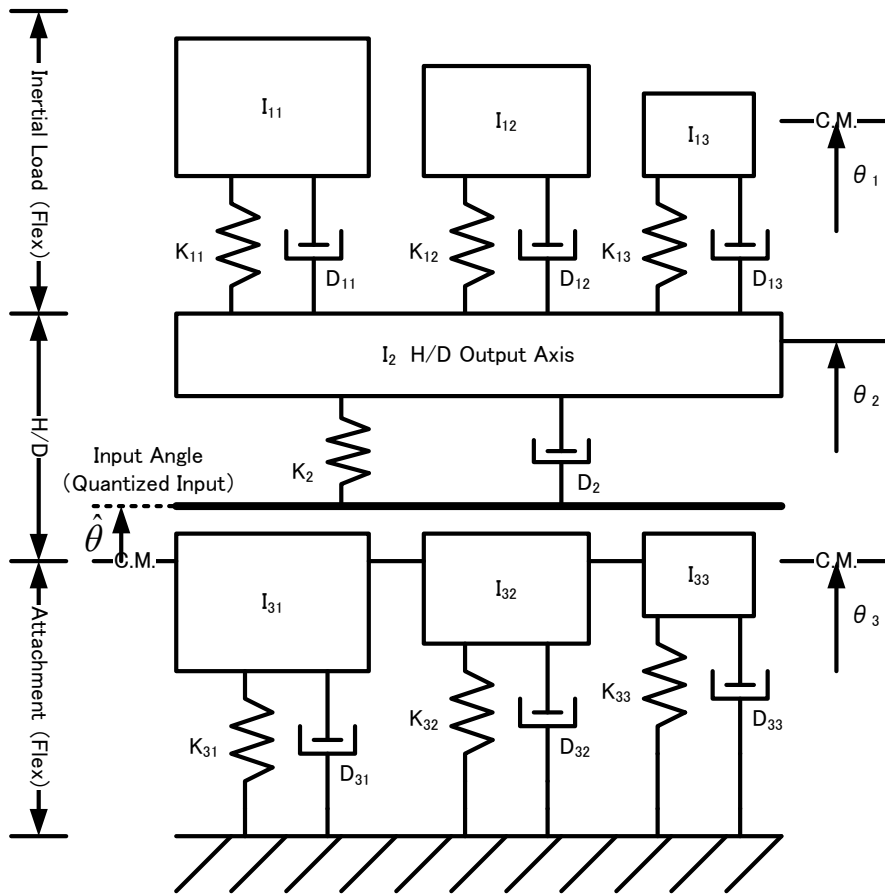


図 6.3.3-2 ステッピングモータ擾乱力学モデル (H/D: 波動歯車装置のギア) [6.1]

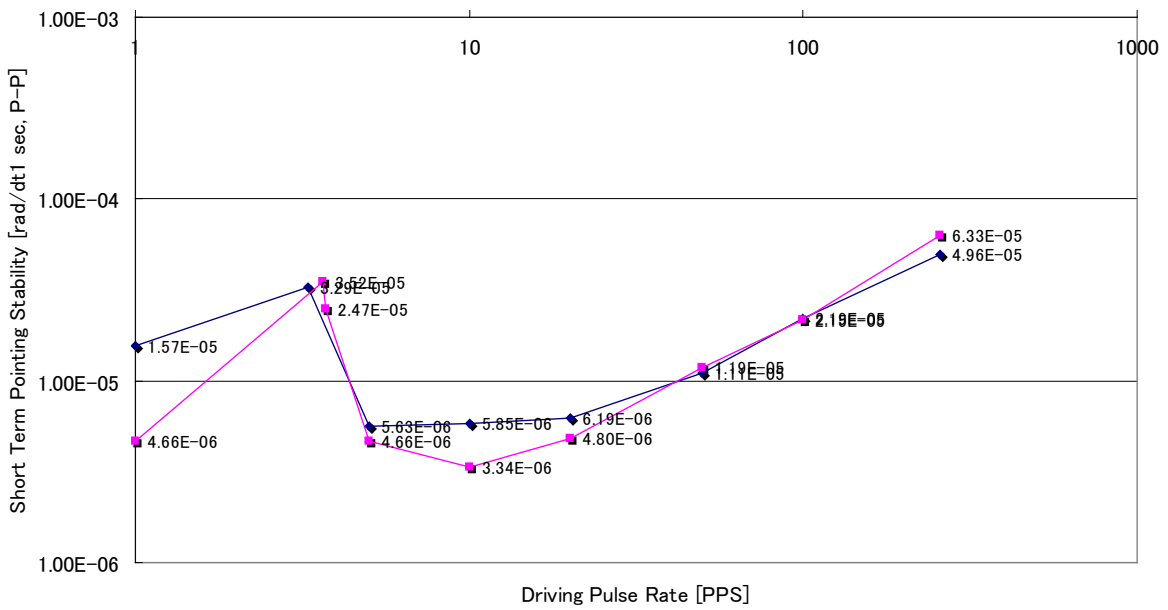


図 6.3.3-3 ステッピングモータの実験データ (黒点) と同定モデル (赤点) の比較 (短期指向安定度) [6.1]

本表現手法の長所は、使用条件（ロータ回転数など）やパラメータの物理量（マスインバランスなど）を変えたときの擾乱量が予測できる、また、物理量をパラメータとすることから擾乱低減を目的とした対策（設計変更、使用条件変更など）の検討・評価に利用できるなど、有用性が高い点が挙げられる。

一方で、本表現手法の短所は、力学モデルを構築するには擾乱発生メカニズムを解明できている必要があり、回転体のマスインバランスモデルのような比較的メカニズムが容易な例を除いて、力学モデルの構築が難しい点が挙げられる。

力学モデル表現は擾乱発生メカニズムに依存するため標準的な一般形を示すのは難しいが、一般に表 6.3.3-1 に示す手順（例）に従って、力学モデルの作成を行うことになる。表 6.3.3-1 の⑤⑥⑦項はパラメータ同定と呼ばれるプロセスで、擾乱モデル固有に設定される（本マニュアルの範囲外）。

表 6.3.3-1 力学モデル作成の手順例

順序	実施作業
①	主要な擾乱要因の識別
②	識別した擾乱要因の発生メカニズム把握
③	発生メカニズムに基づいた擾乱の定式化
④	擾乱測定
⑤	擾乱要因別の擾乱波形の抽出
⑥	パラメータの推定 (擾乱式と擾乱波形のコリレーション)
⑦	擾乱モデル作成

6.3.4 統計量表現

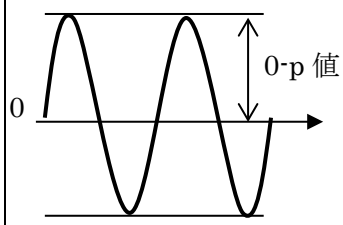
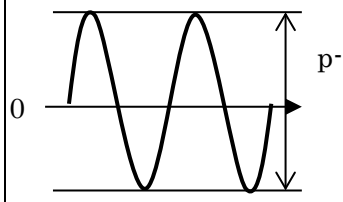
擾乱の時系列データに統計処理を施し、統計量にて表現する手法である。ランダム的な擾乱、及び、データ解析が簡易であることから擾乱レベルのオーダー評価などに適している。

代表的な統計量としては以下が挙げられる^[6.5]。

- ① 平均値
- ② 標準偏差 (σ) (自己共分散の平方根)
- ③ 3σ 値 (標準偏差の3倍) [$③=3\times②$]
- ④ 二乗平均
- ⑤ 時間率 99.7%
- ⑥ 0-p (zero to peak)値
- ⑦ p-p (peak to peak)値 [$⑦=2\times⑥$]

各統計量の定義を表 6.3.4-1 に示す。

表 6.3.4-1 各種統計量の定義

統計量	定義	備考
①平均値	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{データ群})$ $\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (\text{時系列})$	
②標準偏差 (σ) (= $\sqrt{\text{自己共分散}}$)	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{データ群})$ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \bar{x}\}^2 dt} \quad (\text{時系列})$	
③3 σ 値	σ 値=3 \times σ 値 (②) 1次元の正規分布では、 μ (平均値) \pm 3 σ 以内に入る確率=99.73%	
④二乗平均値 (R.M.S 値)	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (\text{データ群})$ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt} \quad (\text{時系列})$ R.M.S (Root Mean Square) 値もしくは実効値とも呼ばれる。	x_i 、 $x(t)$ が平均値からの偏差の場合、②の標準偏差に一致する。
⑤時間率 99.7%値	時系列 (時間関数) に対して、99.7%以上の時間帯がその範囲内に含まれるような値。時間分布が正規分布をとる場合は、3 σ 値と同じ (3 σ の両側を削除したもの)。	
⑥0-p 値	0-P 値 = (Max 値 - Min 値) / 2 	スパイク状のノイズのような明らかな例外値は除くことが多い。
⑦p-p 値	p - p 値 = max 値 - min 値 = 0-p 値 (⑥) \times 2 	スパイク状のノイズのような明らかな例外値は除くことが多い。

6.3.5 パラメータ変動量の扱い

6.3.1～6.3.4 項で示した擾乱モデル表現は、製品 1 台を対象とし、かつ測定毎に測定バラツキは存在しないことを前提としている。

しかしながら、実際には、製品毎に製造バラツキは存在し、測定毎に測定バラツキも存在する。さらに、同じ測定の中でも大きく擾乱量の変動するケースもある。それらのバラツキ、変動量はパラメータ変動量として表れされる。

システム側は擾乱解析を行う上でこれら変動量をどのように扱うか検討し、必要に応じて、擾乱モデル作成要求に反映する。

なお、パラメータの表現方法としては表 6.3.5-1 に示す例が挙げられる。

表 6.3.5-1 パラメータ表現方法例（パラメータ変動量が無視できない場合）

表現方法	内容	長所／短所
ワースト値表現	測定対象台数、測定ケースのワースト値で表現する。	<ul style="list-style-type: none"> 十分な母数が無くともパラメータ量を与えることが可能である。 システム側の擾乱解析において安全側の評価になりえる。
マージン表現	ノミナル値（これも定義は必要）に対して、設計値、製造実績、計測機器特性を参考にマージン（*倍、+*%）を上乗せする。	<ul style="list-style-type: none"> 少ない測定台数、測定ケースに対してパラメータ量を与えることが可能である。 マージン設定量の妥当性を了解する必要がある。
統計量表現	以下のような統計量にてパラメータ変動量を表現する。 例 <ul style="list-style-type: none"> 平均値 + $1 \times \sigma$（標準偏差）値 平均値 + $3 \times \sigma$（標準偏差）値 二乗平均値（R.M.S 値） 	<ul style="list-style-type: none"> 理論的根拠が明らかである。（*） 十分なサンプル数を必要とする。（**）

（*）擾乱が統計量表現されている場合（6.3.4 項）、その統計量パラメータの更なる統計的扱いについては、そのパラメータの意味や理論的妥当性に十分配慮する必要がある。

（**）統計学上は、ある分布を仮定して、十分なサンプル数がない場合にも「信頼水準(確からしさ)」「信頼区間」等で表現することも可能である。しかしながら、十分な信頼水準（例えば、80～90%等）を確保するためにはそれなりのサンプル数を必要とし、ここで想定される擾乱測定のサンプル数からは、実用的な信頼水準のパラメータ推定は困難である。

6.4 衛星システムと擾乱源とのインタフェース

6.3 項は擾乱源が発生する擾乱量（基本的は剛固定条件での測定量）の表現方法を説明してきたが、宇宙機側への擾乱伝搬量を精密に評価する上で、以降に説明する擾乱源の動質量（宇宙機とのインタフェース点における、フォースから加速度への伝達関数の逆数）が必要となる場合もある。

システム側は、その必要性に応じ、コンポーネントメーカと擾乱源の動質量提示の有無、及び動質量の定義とその測定方法について協議を行う。

（動質量を考慮した擾乱解析は JREG-2-152-HB101C「擾乱管理マニュアル」にて扱う）

動質量を用いた擾乱伝搬表現

以下では、擾乱源が発生する擾乱力によって衛星構体を伝搬する振動を動質量の概念を用いて表現する。

最初に、動質量の定義を簡単に述べる。 ω を角振動数、 ω_i と ζ_i をそれぞれ*i*次の振動モードの固有角振動数とモード減衰比とし、*i*次の固有振動モードの周波数応答関数 $H_i(\omega)$ を

$$H_i(\omega) \equiv \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i\omega_i\omega}$$

と定義する。なお、詳しくは付録-IIに記載している。すると、構造上の同一点における加速度とフォースをそれぞれ**A**および**F**と表したとき、それらの関係を表す振動方程式は

$$\mathbf{F}(\omega) = \sum_i \mathbf{M}_{ei} \{ \omega^2 H_i(\omega) + 1 \} \mathbf{A}(\omega)$$

である。ここに、 \mathbf{M}_{ei} は*i*次の振動モードの有効モード質量(Effective Modal Mass)である[6.6][6.7]。上式の導出過程の詳細は付録-IIに記載している。

ここで、伝達関数の総和の中を書き換えると

$$\mathbf{M}(\omega) \equiv \sum_i \mathbf{M}_{ei} \{ \omega^2 H_i(\omega) + 1 \} = \mathbf{M}_S + \sum_i \omega^2 H_i(\omega) \mathbf{M}_{ei}$$

となり、この伝達関数**M**が動質量(Apparent Mass、Dynamic Mass)と呼ばれるもので、対して \mathbf{M}_S は静質量(Static Mass)または剛質量(Rigid Mass)と呼ばれるものである。

次に、この動質量の概念を利用して、衛星構体側の構造伝達と擾乱源単体が発生するフォース（回転成分を含む）の関係を考えてみよう。図 6.4-1 のように、*N* 個の擾乱源がそれぞれ剛なインタフェース面で衛星構体と結合されていると仮定する。そして、*N* 個の擾乱源単体それぞれが発生するフォースは取り付け面を剛固定した条件下でのものとする、それらのフォースと衛星構体のある評価点で発生する加速度は理論的に次式で関係付けられる。（式の導出過程の詳細は付録-Iに記載している）

$$\mathbf{A}_1(\omega) = {}^S\mathbf{G}(\omega) \{ {}^S\mathbf{M}(\omega) + {}^D\mathbf{M}(\omega) \}^{-1} {}^D\mathbf{W}(\omega) \quad (6.4-1)$$

$${}^D\mathbf{M}(\omega) \equiv \begin{bmatrix} {}^D\mathbf{M}_1(\omega) & & & \mathbf{O} \\ & {}^D\mathbf{M}_2(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & {}^D\mathbf{M}_N(\omega) \end{bmatrix}$$

$${}^D\mathbf{W}(\omega) \equiv \{ {}^D\mathbf{W}_1(\omega) \quad {}^D\mathbf{W}_2(\omega) \quad \dots \quad {}^D\mathbf{W}_N(\omega) \}^T$$

- $\mathbf{A}_1(\omega)$: 衛星構体上の評価点の加速度 ($M \times 1$)
- ${}^D\mathbf{W}_j(\omega)$: 取り付け面が剛固定条件での j 番目の擾乱源単体が発生する荷重 6 成分 (6×1)
- ${}^D\mathbf{M}_j(\omega)$: j 番目の擾乱源単体の取り付け点における動質量 (6×6)
- ${}^S\mathbf{M}(\omega)$: 衛星構体の N 個の擾乱源取り付け点における広義の動質量 ($6N \times 6N$)
(広義の動質量とは、複数同一点のフォースに対する加速度 (回転成分を含む) の伝達関数の逆数を意味する)
- ${}^S\mathbf{G}(\omega)$: 衛星構体の擾乱源取り付け点での加速度 (回転成分を含む) に対する衛星構体上の評価点の加速度の伝達関数 ($M \times 6N$)

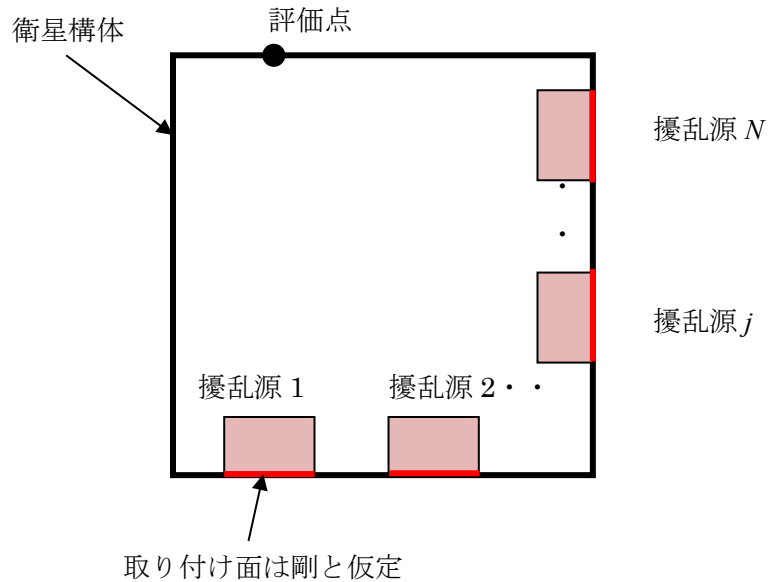


図 6.4-1 衛星構体の取り付けられた N 個の擾乱源

式(6.4-1)から分かることは、 ${}^D\mathbf{W}$ は擾乱源であるコンポーネント側が取得し、システム側に提示する情報であり、対して ${}^S\mathbf{G}({}^S\mathbf{M} + {}^D\mathbf{M})^{-1}$ はシステム側が擾乱応答の推定に必要な応答倍率を見積もるために用いる伝達関数である。システム側が伝達特性を取得するために実施する試験等では擾乱源の代わりに加振治具兼用の構造ダミーを使用している。そのため、この構造ダミーの設計においてシステム側で ${}^D\mathbf{M}$ の情報が必要となる場合があるので、コンポーネント側は適宜システム側と調整した上で、要すればこの情報を提供すること。

なお、擾乱源が回転体の場合には、理論的には ${}^D\mathbf{W}$ のみならず ${}^D\mathbf{M}$ も回転体の回転速度にも依存する。これは回転体のジャイロ効果によるものである。この回転体のジャイロ効果を考慮して、問題を単純化して理論的に ${}^D\mathbf{M}$ を求めた例として文献[6.8][6.9]があるが、その有効性と実現性についてはまだ課題があり、厳密に ${}^D\mathbf{M}$ を考慮する方法は未だ研究段階と言える。

動質量の詳細については、フォースリミット振動試験に関する文献[6.10][6.11]にも記載がある。ただし、フォースリミット振動試験では6自由度ではなく加振方向と一致する並進1自由度の動質量が扱われる。(6自由度動質量の測定方法に関する研究例を付録-IIに記載)

6 章 参考文献

- [6.1] Kamiya, T., “Stepping Motor Driving Disturbance Test and Identification of Mathematical Disturbance Model”, IFAC Proceedings of 17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, 2007.
- [6.2] Masterson, R. A., Miller, D. W., and Gorgan R. L., “Development and Validation of Reaction Wheel Disturbance Model: Empirical Model”, Proceedings of the 40th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, St. Louis, Missouri, United States, AIAA99-1204, April 1999.
- [6.3] Masterson, R. A., “Development and Validation of Empirical and Analytical Reaction Wheel Disturbance Models”, MSc Thesis (SERC #4-99), Massachusetts Institute of Technology, 1999.
- [6.4] Masterson, R. A., and Miller, D.W., “Development of Empirical and Analytical Reaction Wheel Disturbance Models”, GSFC Contract Review, May 27, 1999.
- [6.5] 吉田 憲正著, 宇宙工学概論, 日本機械学会宇宙工学部門編, 2004 年, 12.人工衛星の指向精度
- [6.6] Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures* (2nd Edition), Computer and Structures, Inc. 2003, Chapter 26 Deterministic Earthquake Response: Systems on Rigid Foundations
- [6.7] 小松 敬治著, 機械構造振動学 MATLAB による有限要素法と応用解析, 森北出版, 2009 年, 9.3 節有効モード質量
- [6.8] Elias, L. M., “Dynamics of Multi-Body Space Interferometers Including Reaction Wheel Gyroscopic Stiffness Effects: Structurally Connected and Electromagnetic Formation Flying Architectures”, PhD’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, March 2004.
- [6.9] Elias, L. M., Dekens, F. G., Basdogan, I., and Sievers, L. A., “A methodology for modeling the mathematical interaction between a reaction wheel and a flexible structure”, Proceedings of SPIE Vol.4852 (2003)
- [6.10] JERG-2-130-HB004C, フォースリミット振動試験ハンドブック (2017)
- [6.11] Scharon, T. D., Force Limited Vibration Testing Monograph, NASA-RP-1403, 1997

7 擾乱の測定

本章では、衛星システム側と擾乱源側がインタフェースするために必要となる擾乱源単体が発生する荷重の測定について述べる。

7.1 測定方法

擾乱源が発生する荷重は衛星構体側に取り付けるインタフェース面を剛固定とした状態での反力から評価される。

擾乱源の測定方法は、評価の対象となる周波数帯に応じて異なる。剛固定条件での反力を直接フォースセンサなどで計測する方法と、境界自由条件で発生する加速度または変位の計測値から間接的に剛固定条件の反力を求める方法の2つに識別される^[7.1]。本章では、前者を直接法、後者を間接法として以降紹介する。図 7.1-1 には、測定方法と周波数範囲および本章で紹介する測定装置について簡単にまとめている。

・直接法

直接法はフォースセンサを使用して剛固定状態での擾乱源の反力（6成分）を計測する方法である。通常、高剛性の圧電（ピエゾ）素子型フォースセンサを使用するが、これは 1Hz もしくは数 Hz からの測定が可能である。

この他に、歪ゲージ式や静電容量型のフォースセンサを使用すれば理論的には周波数が直流成分(DC)からの測定が可能であるが、これまで擾乱計測に使用した実績は無い。

・間接法

間接法は境界自由条件下の擾乱源のインタフェース面に発生する加速度と 6.4 節で述べた動質量との積から間接的に剛固定時の反力を推定する方法である^[7.1]。ただし、間接法で必要な擾乱源の動質量の取得方法と実用性については課題がまだ残されている^{[7.2][7.3]}。

特に、極低周波帯測定では、サーボ加速度で測定した加速度情報を用いる方法が考えられるが、一般的にレーザー変位計等で測定した変位情報を利用の方が前者より精度が良い。

なお、文献[7.8]には直接法や間接法が厳密に実施できない場合の代替案として、動特性が既知の弾性体にフォースセンサを挟んで結合し、結合部での力と加速度の計測値を用いて剛固定条件に相当する力を推定する方法と弾性体本体の加速度から推定する方法が提案されている。

周波数帯域	極低周波	低周波	高周波
直接法 (剛固定条件)	歪ゲージ式または静電容量型フォースセンサを用いたフォース計測 [実績なし]	圧電(ピエゾ)素子型フォースセンサを用いたフォース計測 [7.2.1.1 6軸動力計]	
間接法 (境界自由条件)	(バネ定数) × (変位) [7.2.2.2 空気浮上式擾乱測定装置]	(静質量) × (加速度) [7.2.2.1 バネ吊りテーブル]	動質量≒静質量が成立する周波数まで
			(動質量) × (加速度) [実績なし]
周波数	DC (直流成分) ~ 10		~kHz

図 7.1-1 測定方法と周波数範囲

7.2 測定装置

本節では、擾乱源の測定のための装置を紹介する。

7.2.1 直接法に基づく測定装置

本項では、直接法で評価する装置について紹介する。




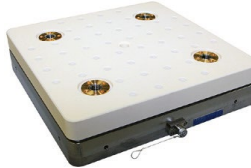


7.2.1.1 6軸動力計

機器が発生する擾乱の測定のために、6軸動力計もしくは多軸動力計(Multi-axis Dynamometer)と呼ばれる装置を使う方法がある。図 7.2.1.1-1 に示すように、動力計は測定台の下に並進方向 3 軸のフォースが同時に計測できる 3 成分フォースセンサを複数個配置して演算によって並進力とトルクそれぞれ 3 軸成分を同時に検出できるように工夫された計測装置である。フォースセンサには圧電(ピエゾ)素子など、力が加わってもほとんど変形しない高剛性の結晶(水晶等)が利用されており、理想的な拘束(剛固定)に近い状態で擾乱源が発生するフォース・トルクを計測できるようになっている。この 6 軸動力計を除振台の上に固定し、外環境からの振動の影響が測定信号に混入しないようにする。一般的な 6 軸動力計の測定系を図 7.2.1.1-2 に示す。

6 軸動力計の代表的な市販製品は表 7.2.1.1-1 に示すようなスイス Kistler 社の装置で、通称キスラーテーブルとも呼ばれている。

表 7.2.1.1-1 スイス Kistler 社の代表的な 6 軸動力計（電荷型）

引用元：日本キスラー社

型番	スペック (製品カタログより)	備考	外観図
9255C	測定レンジ Fx, Fy: -30kN~30kN Fz: -10kN~60kN 固有振動数※ x: ≈2200Hz y: ≈1800Hz z: ≈2300Hz 台寸法 260×260mm 重量 52kg		
9253B	測定レンジ Fx, Fy: -10kN~10kN Fz: -10kN~20kN 固有振動数※ x: ≈800Hz y: ≈750Hz z: ≈850Hz 台寸法 600×400mm 重量 40kg	<ul style="list-style-type: none"> 大型機器 (擾乱源) 向け 測定周波数は低周波帯に限定 	
9236A1	測定レンジ Fx, Fy, Fz: -500N~500N 固有振動数※ x,y: ≈2600Hz z: ≈4500Hz 台寸法 260×260mm 重量 31.5kg	<ul style="list-style-type: none"> 高剛性 真空対応 セラミック製台 	
9236A2	測定レンジ Fx, Fy, Fz: -500N~500N 固有振動数※ x,y: ≈1900Hz z: ≈2500Hz 台寸法 400×400mm 重量 72kg	<ul style="list-style-type: none"> 真空対応 セラミック製台 	
9129AA	測定レンジ Fx, Fy, Fz: -10kN~10kN Mx, My, Mz: -500Nm~500Nm 固有振動数※ x,z: ≈3500Hz y: ≈4500Hz 台寸法 105×90mm 重量 3.2kg	小型機器 (擾乱源) 向け	
9119AA2	測定レンジ Fx, Fy, Fz: -4kN~4kN Mx, My: -150Nm~150Nm Mz: -300Nm~300Nm 固有振動数※ x: ≈4300Hz y: ≈4600Hz z: ≈4400Hz 台寸法 55×80mm 重量 1.35kg	小型機器 (擾乱源) 向け	

※カタログ値の固有振動数と測定可能な周波数帯の上限とは異なることに注意すること。

キスラーテーブルのような市販の 6 軸動力計を使用する上での、留意点を以下に述べる。

(1) 準静的状態が仮定できる場合（低周波帯の測定）

測定する周波数帯の上限が図 7.2.1.1-2 のように擾乱源を取り付けた全体系の固有振動数よりも大幅に低く、準静的状態が仮定できる場合には、以下のような方法で擾乱力を取得することができる。なお、表 7.2.1.1-1 のようにカタログスペックとして固有振動数の記載があるが、これは擾乱源の測定可能な周波数帯域の上限値を直接規定しているものではない。

キスラーテーブルを使う上で専用のチャージアンプ（例えば、スイス Kistler 製 5080A）を用いた場合には、3 成分フォースセンサ（4 個）の感度素子が置かれている面の中心を原点としたフォース・トルク 6 成分を電圧出力値として直接得ることができる。対して、測定台の上に載せた供試体取り付け用治具の中心を基準としたフォース・トルク 6 成分が必要な場合には、以下に述べるような補正が必要となる。

図 7.2.1.1-3 に示すような 3 成分フォースセンサ（4 個）の配置で 6 軸動力計が構成されているとすると、動力計に設置した治具と擾乱源との間のインタフェース面(X-Y 平面)を基準とした合力(F_X, F_Y, F_Z)とトルク(T_X, T_Y, T_Z)は次式のようなものである^[7.4]。

$$\begin{aligned} F_X &= F_{X1} + F_{X2} + F_{X3} + F_{X4} \\ F_Y &= F_{Y1} + F_{Y2} + F_{Y3} + F_{Y4} \\ F_Z &= F_{Z1} + F_{Z2} + F_{Z3} + F_{Z4} \\ T_X &= b(F_{Z1} + F_{Z2} - F_{Z3} - F_{Z4}) - (h + d)F_Y \\ T_Y &= a(-F_{Z1} + F_{Z2} + F_{Z3} - F_{Z4}) + (h + d)F_X \\ T_Z &= b(-F_{X1} - F_{X2} + F_{X3} + F_{X4}) + a(F_{Y1} - F_{Y2} - F_{Y3} + F_{Y4}) \end{aligned} \quad (7.2.1.1-1)$$

a : Y_P 軸からセンサ感度素子までの距離（製品取扱説明書[7.4]に数値の記載あり）

b : X_P 軸からセンサ感度素子までの距離（製品取扱説明書[7.4]に数値の記載あり）

d : 供試体取り付け治具の厚さ

h : 測定台上面からセンサ感度素子まで距離（製品取扱説明書[7.4]に数値は記載）

対して、キスラーテーブル専用チャージアンプからの出力($F_{XP}, F_{YP}, F_{ZP}, T_{XP}, T_{YP}, T_{ZP}$)は感度素子が置かれている X_P - Y_P 平面を基準としているため、次のようである。

$$\begin{aligned} F_{XP} &= F_{X1} + F_{X2} + F_{X3} + F_{X4} \\ F_{YP} &= F_{Y1} + F_{Y2} + F_{Y3} + F_{Y4} \\ F_{ZP} &= F_{Z1} + F_{Z2} + F_{Z3} + F_{Z4} \\ T_{XP} &= b(F_{Z1} + F_{Z2} - F_{Z3} - F_{Z4}) \\ T_{YP} &= a(-F_{Z1} + F_{Z2} + F_{Z3} - F_{Z4}) \\ T_{ZP} &= b(-F_{X1} - F_{X2} + F_{X3} + F_{X4}) + a(F_{Y1} - F_{Y2} - F_{Y3} + F_{Y4}) \end{aligned} \quad (7.2.1.1-2)$$

したがって、式(7.2.1.1-1)(7.2.1.1-2)から 6 軸動力計の測定値を使って、擾乱源の取り付け点で換算したフォース・トルク (6 成分) を求めようとする、トルク 2 成分 (X、Y 軸回り) については次の様な補正が必要であることが分かる。

$$F_X = F_{XP}$$

$$F_Y = F_{YP}$$

$$F_Z = F_{ZP}$$

$$T_X = T_{XP} - (h + d)F_{YP}$$

$$T_Y = T_{YP} + (h + d)F_{XP}$$



$$T_Z = T_{ZP}$$

(7.2.1.1-3)

この補正をリアルタイムで行う必要がある場合には、表 7.2.1.1-2 に示す市販の電圧演算器やリアルタイム性を保証したデジタルシグナルプロセッサなどをチャージアンプの後段に設置することで実現できる。

表 7.2.1.1-2 市販の電圧演算器

引用元：(株) 東陽テクニカ、(株) 小野測器

メーカー	型番	可能な演算	外観図
PCB (米国) ※国内販売元 は東陽テクニ カ	070M69	差分 4Ch: (A-B), (C-D), (E-F), (G-H) 関数演算 1Ch: [(A-B)+(C-D)+(E-F)+(G-H)]*Gain Gain=1, 10, 100	
小野測器	AU3500 (製造終 了品)	関数演算 1Ch: A+B*Gain 0 ≤ Gain ≤ 1	

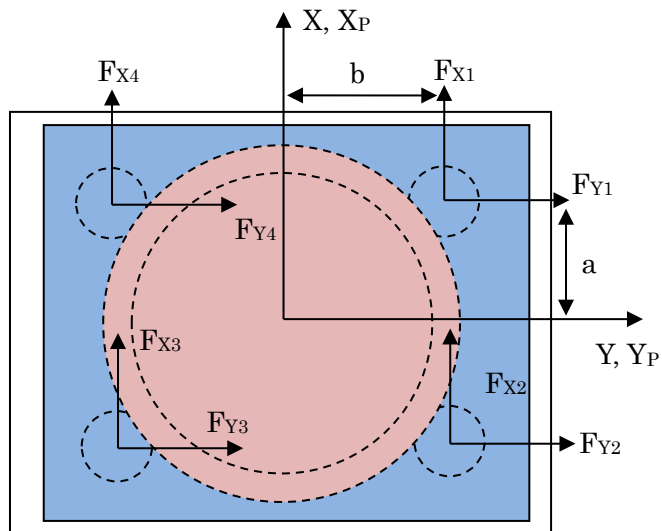
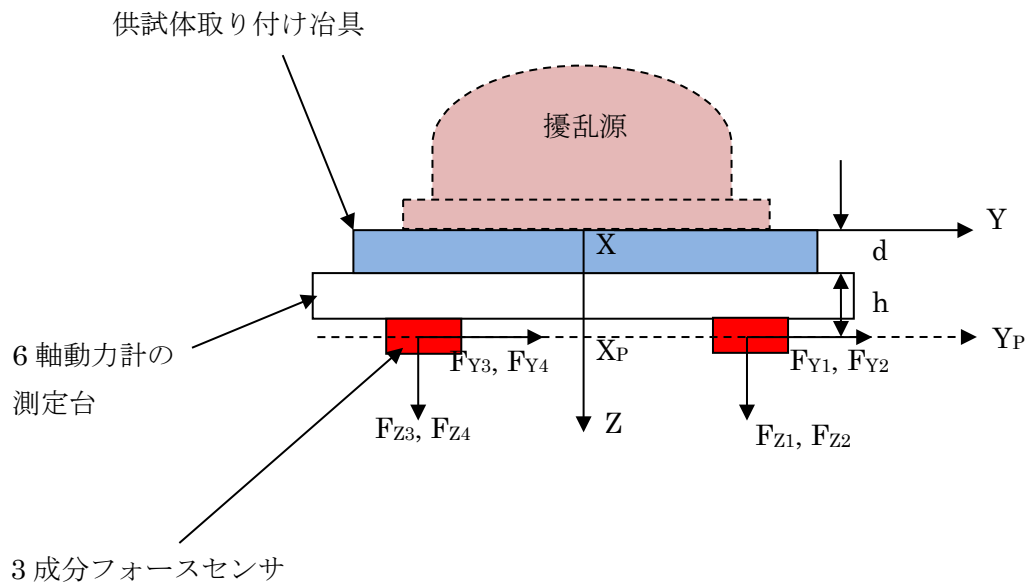


図 7.2.1.1-3 3成分フォースセンサ4個により構成された6軸動力計

(2) 準静的状態が仮定できない場合（高周波帯の測定）

測定する周波数帯の上限が図 7.2.1.1-2 のように擾乱源を取り付けた全体系の固有振動数に近い、それ以上である場合には、準静的状態はもはや仮定できず、6 軸動力計の測定台と供試体取り付け治具の慣性力などの影響が無視できなくなるため、以下に述べるような補正が必要となる。

まず、図 7.2.1.1-4 のように擾乱源の取り付け点で N 点（3 点以上）の評価点を決め、この評価点で囲まれる取り付け面は剛と仮定した上で、その点で 3 軸(X、Y、Z)それぞれインパクトハンマー等を使用して加振を行う。この加振入力を F_{hij} ($i = 1, 2, \dots, N, j = X, Y, Z$) とする。そして、擾乱源を取り付けて稼働しない状態で加振を行い、式(7.2.1.1-3)の 6 軸動力計の出力を規定する際の I/F プレート上の基準点でのフォース F_e として換算すると、 F_{hij} とは次のように関係付けられる。

$$\mathbf{F}_e(\omega) \equiv \begin{Bmatrix} F_{eX}(\omega) \\ F_{eY}(\omega) \\ F_{eZ}(\omega) \\ T_{eX}(\omega) \\ T_{eY}(\omega) \\ T_{eZ}(\omega) \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{F}_h(\omega) \quad (7.2.1.1-4)$$

ただし、

$$\mathbf{F}_h(\omega) \equiv \{ \mathbf{F}_{h1}^T(\omega) \quad \mathbf{F}_{h2}^T(\omega) \quad \dots \quad \mathbf{F}_{hN}^T(\omega) \}^T \quad (7.2.1.1-5)$$

ここで、

$$\mathbf{F}_{hj}(\omega) \equiv \{ F_{hjX}(\omega) \quad F_{hjY}(\omega) \quad F_{hjZ}(\omega) \}^T \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

であり、 $6 \times 3N$ の行列 \mathbf{S} は N 点の加振する取り付け点の幾何学的な位置関係と加振方向より決定する定数行列である。加振点と加振方向を変更して式(7.2.1.1-3)の 6 軸動力計の出力との伝達関数を随時取得すると、結果的に次式にある伝達関数行列 \mathbf{R} の要素を得ることになる。

$$\mathbf{F}_1(\omega) = \mathbf{R}(\omega)\mathbf{F}_h(\omega) \quad (7.2.1.1-6)$$

ただし、

$$\mathbf{F}_1(\omega) \equiv \{ F_X(\omega) \quad F_Y(\omega) \quad F_Z(\omega) \quad T_X(\omega) \quad T_Y(\omega) \quad T_Z(\omega) \}^T \quad (7.2.1.1-7)$$

したがって、式(7.2.1.1-4)(7.2.1.1-6)より次の関係を得る。

$$\mathbf{F}_e(\omega) = \mathbf{Q}(\omega)\mathbf{F}_1(\omega) \quad (7.2.1.1-8)$$

ここで、 \mathbf{Q} は次のように定義される伝達関数である。

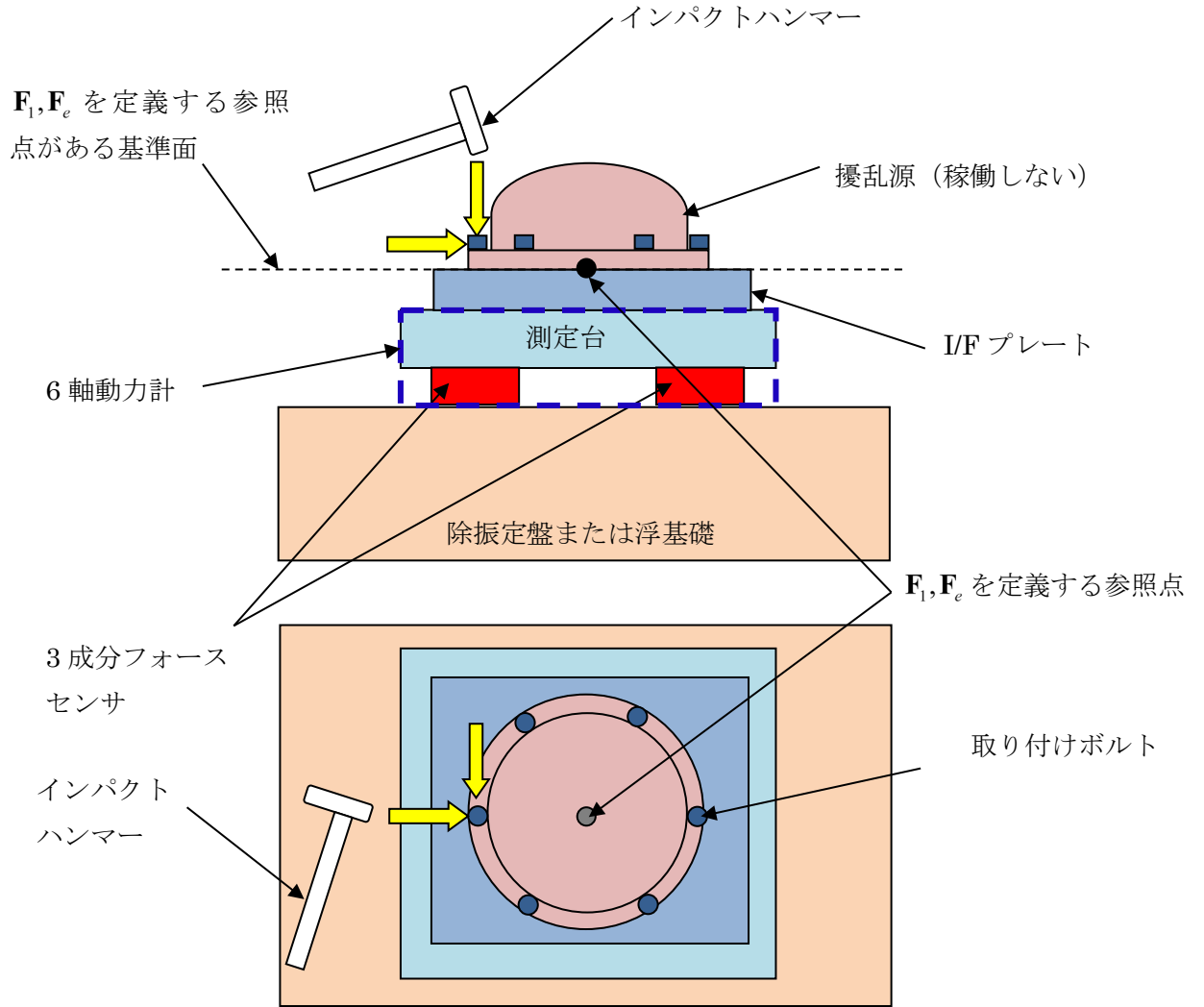
$$\mathbf{Q}(\omega) \equiv \mathbf{S}\mathbf{R}^\#(\omega) \quad (7.2.1.1-9)$$

また、 $\mathbf{R}^\#$ は次のように定義される \mathbf{R} の一般化逆行列である。

$$\mathbf{R}^\#(\omega) \equiv \{ \mathbf{R}^T(\omega)\mathbf{R}(\omega) \}^{-1}\mathbf{R}^T(\omega)$$

したがって、6 軸動力計の出力に対して式(7.2.1.1-8)のように伝達関数 \mathbf{Q} を用いて補正を行えば、加振を行った N 点の評価点で囲まれる取り付け面が剛で弾性変形しないという仮定の上で、理論上は高周波帯まで測定できる。（詳細は付録 - III に記載している）

なお、式(7.2.1.1-9)の $Q(\omega)$ が単位行列とみなせる周波数帯が前述の準静的状態が仮定できる周波数範囲である。



← はインパクトハンマーの加振方向とその先端は加振位置を表す。
 取り付け面に対して、3軸加振を3点以上について実施する。

図 7.2.1.1-4 測定値の補正に必要な伝達関数の取得方法

(3) 感度とフォースの作用点に関する留意点

製品に附属される感度表にはチャージアンプに入力するための感度値が記載されているが、これはセンサ 4 個それぞれの感度値ではなく、4 個の代表値 F_X, F_Y, F_Z である。例として、図 7.2.1.1-5 にキスラーテーブル 9253B の感度表を示す。この感度値はテーブル上面からオフセットした位置にフォースを作用して校正を行った結果に基づくもので、図 7.2.1.1-5 の例では測定台の上面から 22.5mm 下（測定台の側面）に X 方向、Y 方向にそれぞれフォースを作用させている。

測定対象の擾乱源内部のフォースの作用点が予め分かっており、その作用点の位置がある一点で代表できる場合には、その点にフォースを作用させた校正を行うことが最も望ましいが、作用点が製品取扱説明書に指定されている範囲内であれば、感度値の誤差は測定レンジに対して無視できる程度に小さいと言われている。図 7.2.1.1-6 に例としてキスラーテーブル 9253B の作用点の範囲を示す。作用点がこの範囲を超える場合には、付属の感度表の値は有効ではなく、メーカーによる特別校正が必要となる。



Kalibrierschein Kraft Calibration Certificate Force

Type **9253B12U** Serial No.

Kalibriert durch Calibrated by	Datum Date	
S. Mogavero	05.10.2007	
Referenzgeräte Reference Equipment	Typ Type	Serien-Nr. Serial-No.
Gebrauchsnorm Working Standard	Kistler 9067	474351
	Kistler 9068	107070
	Kistler 9068	128643
Ladungsverstärker Charge Amplifier	Kistler 5017B	619141
	Kistler 5017B	619142
Ladungskalibrator Charge Calibrator	Kistler 5395A	605262
Umgebungstemperatur Ambient Temperature	Relative Feuchte Relative Humidity	
°C	%	
23	50	

代表値としての感度値
(1kN、10kN の 2 つのレンジに
ついてフォース 3 成分の感度値
が記載)

Messergebnisse Results of Measurement

Kalibrierter Bereich Calibrated Range	Empfindlichkeit Sensitivity	Linearität Linearity	Übersprechen Cross talk	
kN	pC/N	±% FSO	%	%
<i>F_x</i> 0 ... 10	-7,638	0,02	<i>F_x</i> → <i>F_y</i> -0,4	<i>F_x</i> → <i>F_z</i> -0,6
<i>F_x</i> 0 ... 1	-7,629	0,03	<i>F_x</i> → <i>F_y</i> +0,5	<i>F_x</i> → <i>F_z</i> -0,5
<i>F_y</i> 0 ... 10	-7,632	0,01	<i>F_y</i> → <i>F_x</i> 1,1	<i>F_y</i> → <i>F_z</i> -0,3
<i>F_y</i> 0 ... 1	-7,634	0,07	<i>F_y</i> → <i>F_x</i> 1,1	<i>F_y</i> → <i>F_z</i> -0,2
<i>F_z</i> 0 ... 20	-3,837	0,04	<i>F_z</i> → <i>F_x</i> 0,0	<i>F_z</i> → <i>F_y</i> -0,1
<i>F_z</i> 0 ... 2	-3,819	0,01	<i>F_z</i> → <i>F_x</i> 0,0	<i>F_z</i> → <i>F_y</i> -0,2

Force Application Point for *F_x* / *F_y*: 22,5 mm below the top plate

測定台上面から 22.5mm 下
(測定台側面) の点で X、Y 方
向にそれぞれフォースを作用
させている

Messverfahren
Measurement Procedure

Kontinuierliche Kalibrierung, Vergleichsverfahren
Continuous Calibration, Comparison Method

Bestätigung Confirmation

Wir bestätigen, dass das oben identifizierte Gerät nach den vorgeschriebenen Verfahren geprüft wurde. Alle Messmittel sind auf nationale Normale rückverfolgbar. Kistler betreibt die SCS (Swiss Calibration Service) Kalibrierstelle Nr. 049, akkreditiert nach ISO 17025. Das Kistler Qualitätsmanagement System ist nach ISO 9001 zertifiziert.

We confirm that the device identified above was tested by the prescribed procedures. All measuring devices are traceable to national standards. The SCS (Swiss Calibration Service) Calibration Laboratory No. 049 is operated by Kistler and accredited per ISO 17025. The Kistler Quality Management System is certified per ISO 9001.

Kistler Instrumente AG

Eulachstrasse 22
Postfach
CH-8408 Winterthur

TeL +41 52 224 11 11
Fax +41 52 224 14 14
info@kistler.com

ZKB Winterthur BC 732
Swift: ZKBKCHZ280A
Konto: 1132-0374.628

IBAN: CH67 0070 0113 2003 7462 8
MwSt. Nr.: 229 713
ISO 9001 zertifiziert

www.kistler.com

Seite 2/22 1/1

図 7.2.1.1-5 キスラーテーブル 9253B の感度表の例 引用元：日本キスラー社

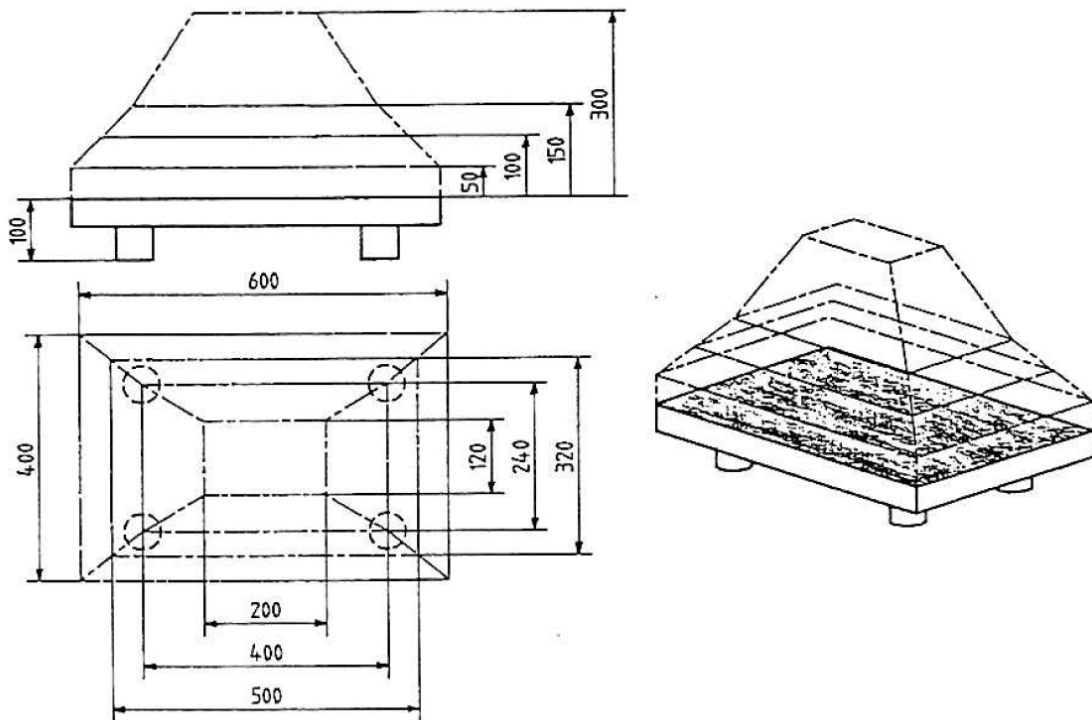


図 7.2.1.1-6 キスラーテーブル 9253B を使用する際のフォースの作用点の範囲^[7.4]

引用元：日本キスラー社

(4) 6 軸動力計を自作する場合の留意点

図 7.2.1.1-7 の圧電（ピエゾ）素子型 3 成分フォースセンサ単体を市販品として入手することは可能なので、複数個（3 個以上）を用いて 6 軸動力計を自作することができる。ただし、所定の感度を得るためには図 7.2.1.1-8 のようなセンサにプリロードを負荷する作業が必要である。さらに、フォースセンサの上に乗せる測定台の上面での 6 軸動力計としての校正値（感度値）が必要となる。この校正の簡易的な方法は付録 - III に記載する。

プリロード負荷作業の手順は、キスラーの製品についてはマニュアルに記載があるが、もし作業が煩雑である場合には、図 7.2.1.1-9 のフォースリンク (Force Link) という製品を利用することもできる。これは予めプリロードキットを使って 3 成分フォースセンサにプリロードを負荷した状態で校正した製品であるため、試験前にプリロードを負荷する作業が不要という利点がある。ただし、表 7.2.1.1-2 と表 7.2.1.1-3 を比べて分かるように、プリロードキットを付けることによってセンサ自体は重く、寸法も大きくなるため、センサの設置や実装に制約が出てくる場合もある。また、治具等の取り付けによってフォースリンクに初期に付加されているプリロードから軸力の大幅な増減が生じる場合には、正しい感度が得られない場合もある。

上記は圧電素子型センサに関しての内容であったが、歪ゲージ式や静電容量型のフォースセンサも市販品として存在し、これらを使えば理論的には周波数が直流（DC）成分から

計測できる装置を構築できる。このセンサ内部には板バネがあり、荷重による板バネの変形量を歪ゲージや静電容量型変位センサで計測することでフォースを算出している。

これらのセンサを擾乱計測で使用する際には、以下の点で取り扱いに注意が必要である。

- ・測定周波数上限値
- ・分解能
- ・温度ドリフト

高剛性ではないために測定周波数の上限は圧電素子型のものに対して圧倒的に低くなる。そして、センサ上に供試体を設置することにより、その自重だけで内部の板バネがすでに変形しており、さらにその時点から増加する振動成分を計測するため必然的に分解能が落ちる傾向になる。特に高感度仕様のセンサは板バネが容易に変形するように意図的に柔軟性を持たせているために分解能の劣化が無視できない。そこで、自重分をキャンセルするような工夫を施すか、重力方向に直交の面内成分（面内並進 2 成分、回転 1 成分）だけに 1 度の計測の自由度を限定し、軸換えを行うことでフォース 6 成分を計測する方法などが考えられる。さらに、温度変化に応じて内部の板バネが熱歪で変形することで温度ドリフトが生じるため、測定中は温度変化が可能な限りないように配慮する必要がある。もし、擾乱源が稼働時に発熱するようなものであれば、測定は非常に困難になる。上記のいくつかの問題点から、歪ゲージ式や静電容量型のフォースセンサを擾乱計測で使用した実績は国内ではほとんど無い。

表 7.2.1.1-2 代表的な圧電（ピエゾ）素子型 3 成分フォースセンサ

引用元：日本キスラー社、(株) 東陽テクニカ

メーカー	型番	出力タイプ	スペック（製品カタログより）
Kistler (スイス) ※国内では 日本キスラー 社が販売 権を有する	9017C	電荷型	測定レンジ： Fz : -3kN ~ 3kN Fx, Fy : -1.5kN ~ 1.5kN スレッシュヨルド <10mN 感度： z : ≈-11 pC/N x, y : ≈-25 pC/N 寸法： φ 19×10(H)mm 重量： 14g
	260B01	IEPE 型 ICP 型® (プリアンプ 内蔵型)	測定レンジ： Fz : -4.45kN ~ 4.45kN Fx, Fy : -2.22kN ~ 2.22kN 感度： z : 0.56mV/N x, y : 2.25mV/N 寸法： 24.1(L)×27.3(W)×9.9(H)mm 重量： 26.57g
PCB(米国) ※国内では (株) 東陽 テクニカが 販売権を有 する	260M21A (超 高 感 度 特 殊 仕 様)	IEPE 型 ICP 型® (プリアンプ 内蔵型)	測定レンジ： Fz : -111N ~ 111N Fx, Fy : -44N ~ 44N 感度： z : 22.5mV/N x, y : 112mV/N 寸法： 24.1(L)×27.3(W)×9.9(H)mm 重量： 26.57g

表 7.2.1.1-3 代表的な圧電（ピエゾ）素子型 3 成分フォースリンク

引用元：日本キスラー社、(株) 東陽テクニカ

メーカー	型番	出力タイプ	スペック（製品カタログより）
Kistler (スイス) ※国内では 日本キスラー 社が販売 権を有する	9317C	電荷型	測定レンジ： Fz : -3kN ~ 3kN Fx, Fy : -1.5kN ~ 1.5kN スレッシュヨルド <10mN 感度： z : ≈-11 pC/N x, y : ≈-26 pC/N 寸法： 25(L)×25(W)×30(H)mm 重量： 85g
	261B01	IEPE 型 ICP 型® (プリアンプ 内蔵型)	測定レンジ： Fz : -4.45kN ~ 4.45kN Fx, Fy : -2.22kN ~ 2.22kN 感度： z : 0.56mV/N x, y : 2.25mV/N 寸法： 42(L)×42(W)×42(H)mm 重量： 386g
PCB(米国) ※国内では (株) 東陽 テクニカが 販売権を有 する	M261M09 (超 高 感 度 特 殊 仕 様)	IEPE 型 ICP 型® (プリアンプ 内蔵型)	測定レンジ： Fz : -111N ~ 111N Fx, Fy : -44N ~ 44N 感度： z : 22.5mV/N x, y : 112mV/N 寸法： 42(L)×42(W)×42(H)mm 重量： 386g



(a)スイス Kistler 社 9017C



(b)米国 PCB 社 260B01 (260M21A と形状同一)

図 7.2.1.1-7 3成分フォースセンサ (スペックは表 7.2.1.1-2 に記載)

引用元：日本キスラー社、(株)東陽テクニカ



図 7.2.1.1-8 Kistler フォースセンサのプリロード負荷の様子

(Kistler 製品マニュアルより)

引用元：日本キスラー社



(a)スイス Kistler 社 9317C

プリロード
キット



(b)米国 PCB 社 261B01 (M261M09 と形状同一)

プリロード
キット

図 7.2.1.1-9 3成分フォースリンク (スペックは表 7.2.1.1-3 に記載)

引用元：日本キスラー社、(株)東陽テクニカ

7.2.2 間接法に基づく測定装置

本項では、間接法で評価する装置について紹介する。

7.2.2.1 バネ吊りテーブル

図 7.2.2.1-1 のバネ吊りテーブルは、擾乱の評価や擾乱測定装置の校正に使用する目的で製作された境界条件がフリーの 6 自由度疑似自由条件を提供する簡便な装置である。

図 7.2.2.1-1 に示すように装置の試験部は、主に直方体枠の支持部と供試体を搭載する剛な試験台から構成されている。その試験台は支持部から 4 本の柔らかいバネで吊り下げられている。試験部全体は床から外部振動入力を抑える目的で全体が除振台上に設置されている。そして、試験部の周囲は外部からの音響の影響を抑える意図と、試験中の安全確保のためにステンレスプレートとアクリル板で覆われている。

装置の概要を表 7.2.2.1-1 に示す。本装置では、十分剛性が高い試験台を柔らかいバネで吊り下げることにより、6 自由度の運動（3 軸並進+3 軸回転）に対して、1 次固有振動数が低い機械共振系を構成し、静的には拘束するが、1 次固有振動数より高い周波数領域では自由運動に近い環境を提供できるようにした。

試験台には擾乱源を搭載した上で、高感度加速度計を配置することで、慣性系に対する 6 自由度の並進・回転の加速度 A_2 を取得する。すると、擾乱源を剛固定した際のフォース・トルク ${}^D\mathbf{W}$ は次式から得ることができる。（導出過程は付録-IV に示す）

$${}^D\mathbf{W}(\omega) = \{ {}^T\mathbf{M}(\omega) + {}^D\mathbf{M}(\omega) \} \mathbf{A}_2(\omega) \quad (7.2.2.1-1)$$

ここで、 ${}^D\mathbf{M}$ は擾乱源の取り付け点での動質量であり、 ${}^T\mathbf{M}$ は試験台の取り付け点での動質量である。式(7.2.2.1-1)は表 7.2.2.1-1 に示す系の 1 次固有振動数より高い周波数領域において有効である。さらに、動質量が静質量と近似できる周波数が低い領域では、それぞれの静質量 ${}^T\mathbf{M}_S$, ${}^D\mathbf{M}_S$ を使って次式から見積もることができる。

$${}^D\mathbf{W}(\omega) = ({}^T\mathbf{M}_S + {}^D\mathbf{M}_S) \mathbf{A}_2(\omega) \quad (7.2.2.1-2)$$

ただし、擾乱源が回転体の場合には、低周波帯であっても回転体の回転数が高ければ、動質量にジャイロ効果の影響が現れるため、単純に静質量で近似できるとは限らない。ジャイロ効果を考慮した動質量に関してはまだ研究段階であるため、式(7.2.2.1-1)のような動質量を使った厳密な計測の実績はまだ国内にはない。

表 7.2.2.1-1 装置の概略

装置外形（除振部を除く）[mm]	800 × 800 × 1200	
試験台外形[mm]	300 × 300 × 17	
試験台質量[kg]	12	
試験台固有振動数[Hz]	並進	鉛直方向：約 0.6 以下 水平方向：約 0.5 以下
	回転	鉛直軸周り：約 0.9 以下 水平軸周り：約 1.1 以下
供試体最大質量[kg]	11	

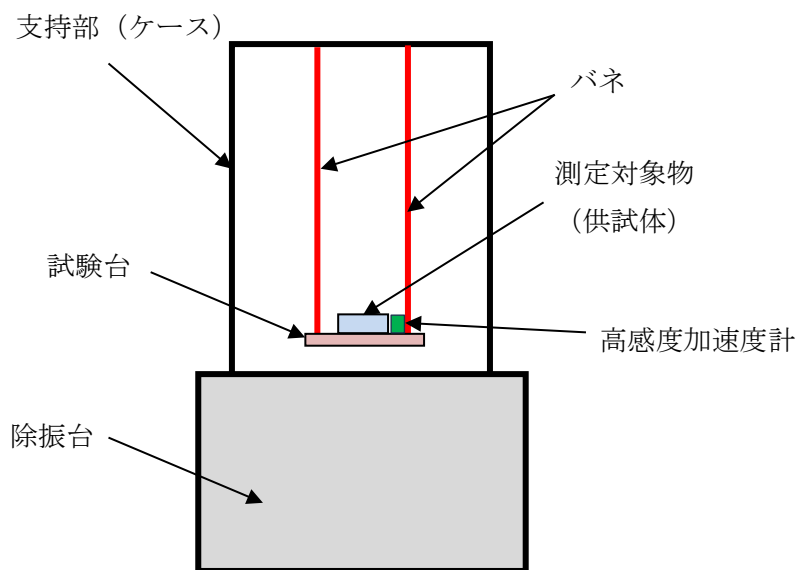


図 7.2.2.1-1 バネ吊りテーブル概略図

7.2.2.2 空気浮上式擾乱測定装置

数 Hz 以下の低周波の擾乱を高精度に測定することを目的とした装置として、図 7.2.2.2-1 のような空気浮上式の装置が開発されている^{[7.5][7.6][7.7]}。

まず、図 7.2.2.2-1 (a) の 1 次元型を例に紹介すると、この測定系は図 7.2.2.2-2 のようであり、主にエアスライダ部、圧縮空気供給系統、レーザー変位計およびデータ記録部／処理部により構成されている。擾乱源はエアスライダ部に取り付けられ、測定対象が発生する擾乱力により励起されて移動したエアスライダの変位量をレーザー変位計で計測する。

図 7.2.2.2-2 にエアスライダ部にバネとダンパーが取り付けられているが、これがない場合には、エアスライダが測定対象の周波数帯で剛であることとすると、エアスライダの変位量 X は次のように表すことができる。

$$X(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}A(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}({}^DM+{}^AM)^{-1}{}^DW(\omega) \quad (7.2.2.2-1)$$

ここで、 ω は角振動数、 DW は剛固定条件での擾乱源が発生するフォース、 DM は擾乱源の質量（静質量）、 AM はエアテーブルの質量（静質量）である。したがって、このときは次式から DW を求めることができる。

$${}^DW(\omega) = -\omega^2({}^DM+{}^AM)X(\omega) \quad (7.2.2.2-2)$$

次に、図 7.2.2.2-2 のようにエアスライダ部にバネ定数 K が既知の柔らかいバネと粘性係数 C が既知のダンパーを取り付けると、式(7.2.2.2-2)は次のようになる。

$${}^DW(\omega) = -\omega^2({}^DM+{}^AM)X(\omega) + j\omega CX(\omega) + KX(\omega) \quad (7.2.2.2-3)$$

式(4.2.2.2-3)から振幅で見ると次式のようになり、変位量 X はレーザー変位計で計測できるので、結果的に DW の大きさを得ることができる。

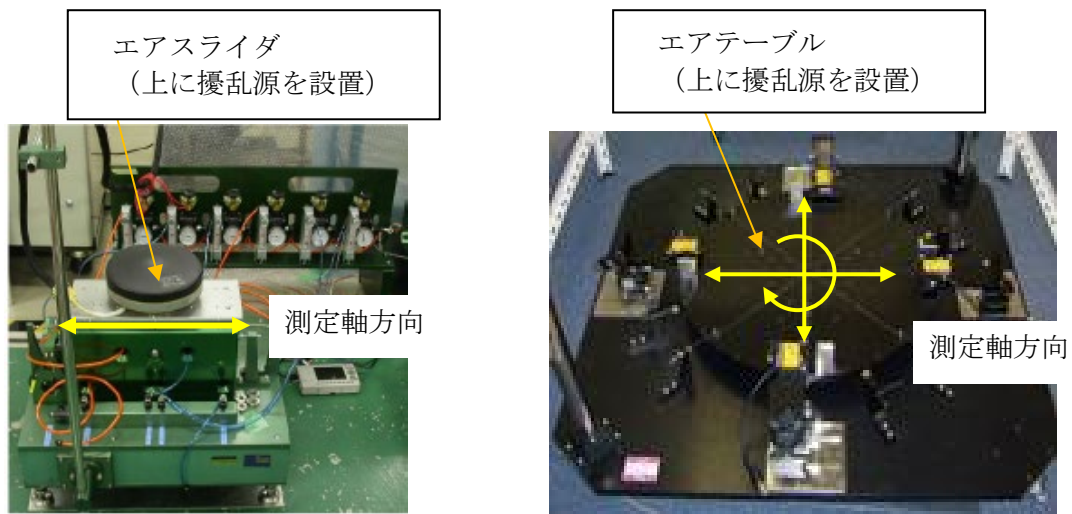
$$|{}^DW(\omega)| = |X(\omega)|\sqrt{\{-\omega^2({}^DM+{}^AM) + K\}^2 + \omega^2C^2} \quad (7.2.2.2-4)$$

1次元式を2次元式に発展させたのが、図 7.2.2.2-1 (b)の装置である。1次元式のエアスライダに相当するエアテーブルを空気で浮上させ、エアテーブル上4ヶ所をレーザー変位計で測定することで、面内変位（並進2成分、回転1成分）を取得する。残りの成分については、擾乱源の向きを換えてエアテーブルに載せることで取得する。

これまで0.1Hzから10Hzの周波数帯で、1次元式では $10^{-4} \sim 10^{-3}$ [N]オーダー、2次元式では並進で 10^{-5} [N]オーダー、回転で 10^{-5} [Nm]オーダーの検出能力を確認している。レーザー変位計の精度から解析にて求めた測定精度、及び、バックグラウンドレベル（供試体は駆動を停止した状態）の実測例を図 7.2.2.2-3 に示す。

リアクションホイールを供試体として擾乱を測定した例を以下に示す。10Hz以下の低周波においてロータのアンバランスによる回転周波数に同期した擾乱、およびベアリング保持器の周波数（回転周波数の0.6倍）の擾乱が検知できている（図 7.2.2.2-4）。

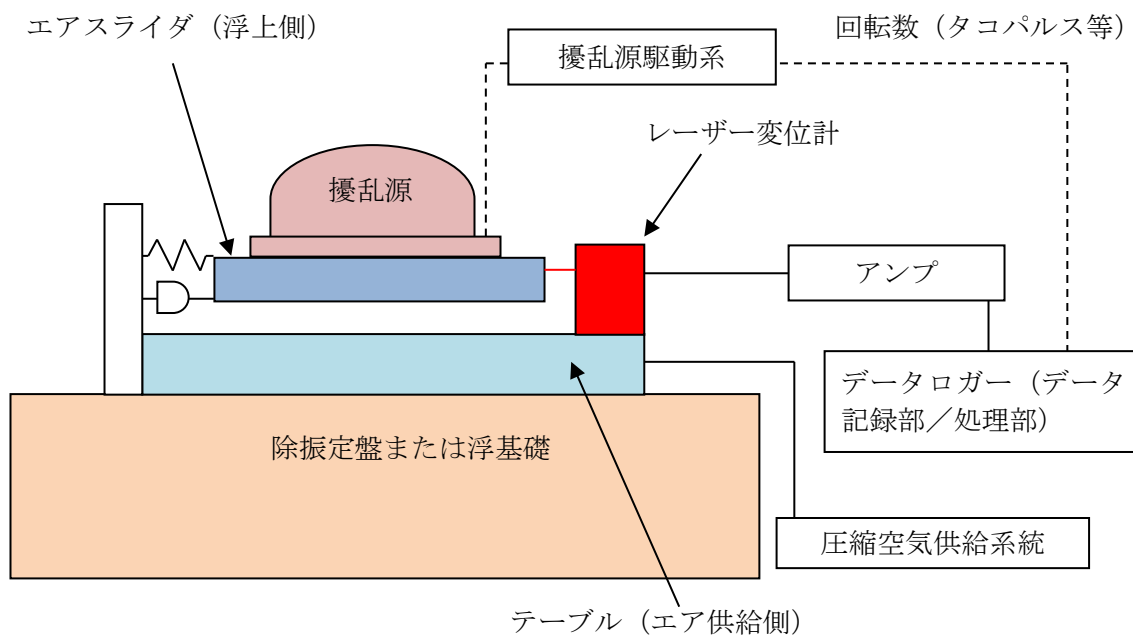
空気浮上式擾乱測定装置では、極低周波における非常に小さい擾乱を検出するものであるが、測定値の正確さには注意を要する。それは、式(7.2.2.2-4)の導出に置いた仮定が実際の現象とは異なるからである。例えば、式(7.2.2.2-4)中のバネ定数 K や粘性係数 C は変位の計測の時系列波形から推定することになるが、このときは粘性減衰モデルを仮定している。しかしながら、実際の時系列データは粘性減衰モデルとは一致しない。これは空気膜による減衰がより複雑であることや、バネ取り付け部の固体摩擦（クーロン摩擦）が含まれているためである。また、バネマスーダンパー系の固有振動数付近では変位量が大きくなるため、微小変位＝線形モデルを仮定した式(7.2.2.2-4)から乖離が大きくなる。その他、エアパッドからの空気流の擾乱等も特定の周波数で誤差要因となる。



(a)1次元型

(b)2次元型

図 7.2.2.2-1 空気浮上式擾乱測定装置



※点線部分は無の場合もある

図 7.2.2.2-2 測定系の例

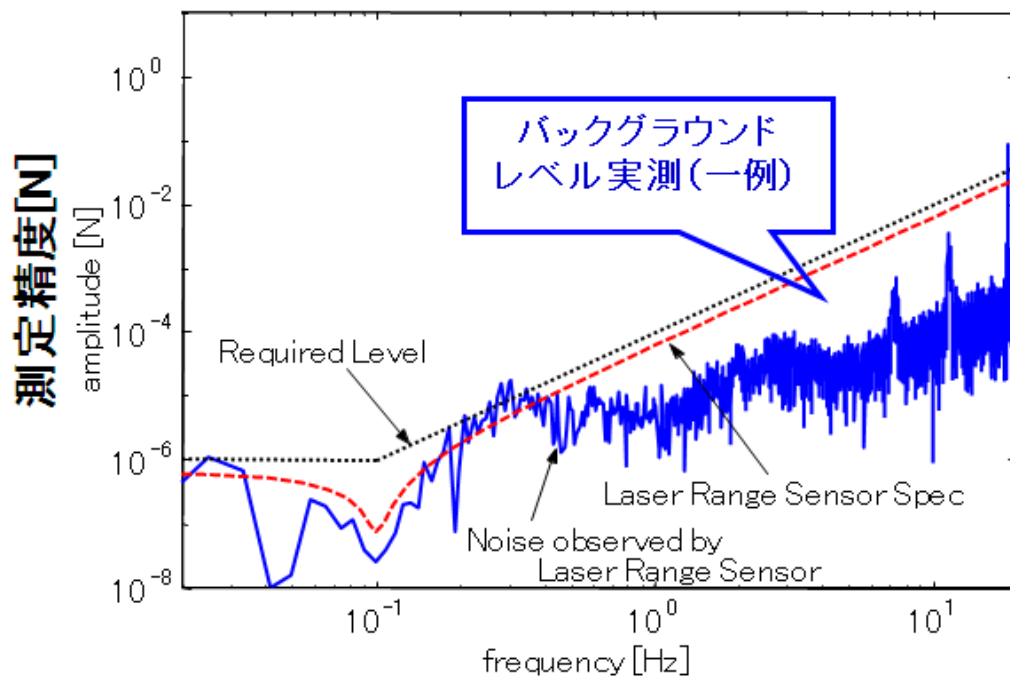


図 7.2.2.2-3 測定精度 (実測例)

Laser Range Sensor Spec は、レーザー変位計精度から測定精度解析値
Requirement Level は、測定装置に対して設定した仕様値

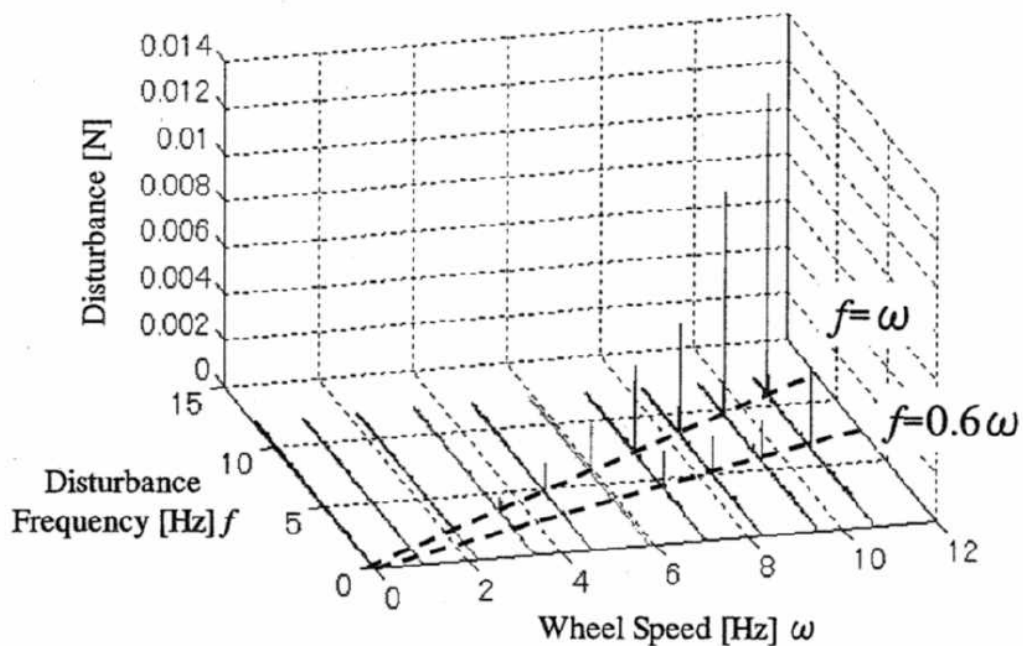


図 7.2.2.2-4 ウォーターフォール図 [7.5]

7.2.2.3 十字バネ支持テーブル

図 7.2.2.3-1 のような十字バネ構造を用いて、無摩擦に近い状態でリアクションホイール (RW) の擾乱を計測した例を以下に示す。

図 7.2.2.3-2 に試験系のブロック図を示す。十字バネテーブルとは、十字バネで支持されたテーブルのことであり、これに RW を搭載すれば、RW のリアクションでテーブルが回転する。RW が発生する擾乱の影響を考慮した姿勢制御の結果がレーザー角度計で角度変位として計測することができる。このレーザー角度計の検出角を姿勢センサの検出角と見立てた姿勢制御則と RW 駆動装置を通して RW を駆動すれば、軌道上の一軸姿勢運動を模擬した姿勢制御ループができあがる。ただし、以下のような試験上の注意点が存在する。

- (1) 十字バネテーブルの慣性能率は実際の衛星のそれよりもはるかに小さいため、十字バネテーブルの角度は慣性能率比だけ増幅される。試験系の制御ループのゲインを慣性能率比だけ減らして、ループゲインが軌道上と同じにする必要がある。
- (2) 良好な極低周波領域の評価のために、十字バネテーブルは剛にする必要がある。
- (3) 十字バネには復元トルクが存在するため、軌道上のダイナミクスに近付けるためには、復元トルクの影響を落とす工夫が必要となる。図 7.2.2.3-3 に RW が十字バネテーブルに搭載された状態を示す。図のように、実際の十字バネテーブルは回転軸を鉛直ではなくて水平とし、バランスウェイトを回転軸よりも上に装着することで十字バネの復元トルクを打ち消している。

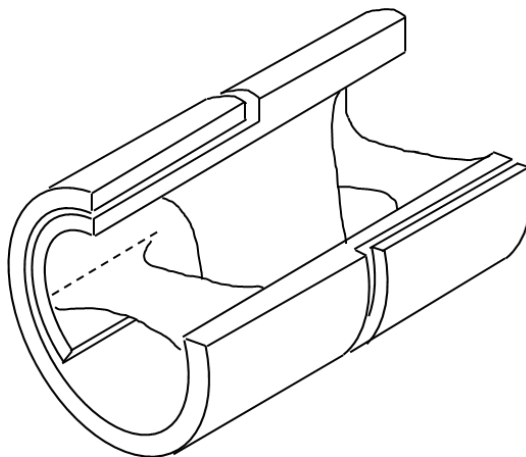


図 7.2.2.3-1 十字バネの構造

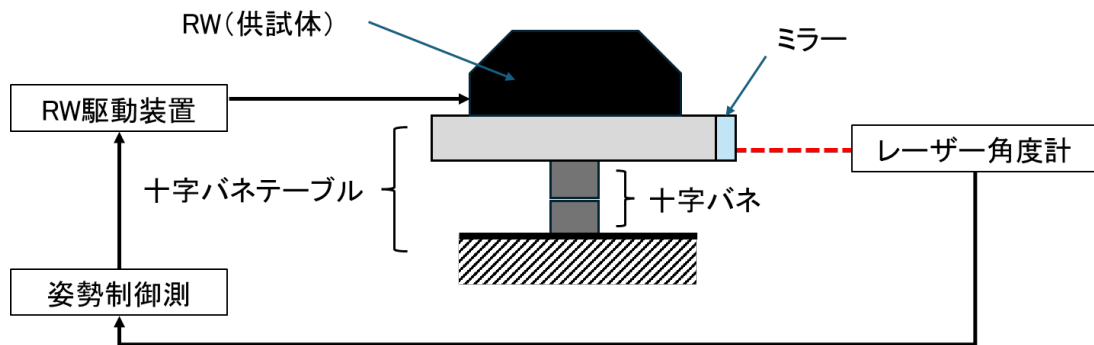


図 7.2.2.3-2 試験系のブロック図

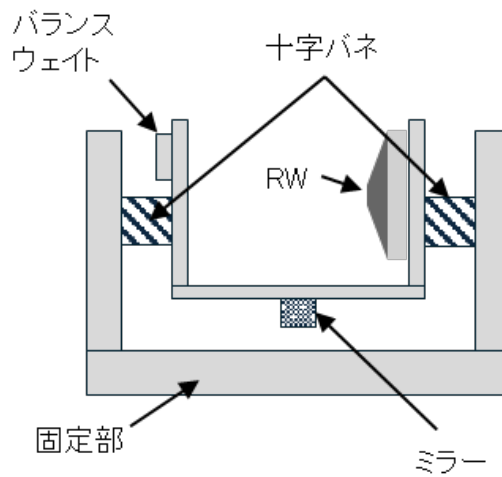


図 7.2.2.3-3 十字バネテーブルの形状

7.3 測定条件

本節では、擾乱測定時に配慮すべき事項を述べる。

7.3.1 ノイズ

擾乱測定時の計測環境として、以下の3つのノイズに配慮すること。

- ・電気ノイズ
- ・振動
- ・音

本測定時の前後ではバックグラウンドノイズを計測して、高い信号雑音比 (S/N 比) が十分に確保されていて、本測定の結果が妥当であることを確認すること。

7.3.1.1 電気ノイズ

電気ノイズの排除のために、アース（グラウンド）を設置すること。商用電源(AC)のノイズが著しい場合は、電源系本体にノイズフィルターの回路を付けるか、バッテリーまたは直流電源(DC)駆動できる計測装置を使用することが望ましい。計測装置の中には車載用を目的として DC12V で駆動できる可搬型の市販製品が多数あるので、その中から選択することもできる。

計測に使用する加速度計やフォースセンサとチャージアンプとの距離を短くすることで、アンテナ効果によってセンサケーブルに生じる電気ノイズを低減することができる。また、プリアンプがセンサに内蔵されているタイプ (IEPE (Integrated Electronics Piezo-Electric) 型、ICP 型[®]) のものは電源ノイズに強い利点があり、このタイプのセンサを使用するときは、チャージアンプの代わりにシグナルコンディショナに接続する。シグナルコンディショナの中にはゲイン付きのものが市販品としてあり、このゲインを上げることで S/N 比をさらに向上できる場合がある。

7.3.1.2 振動

測定系は除振定盤や浮基礎などの上に設置し、外乱ノイズ（振動）を排除するよう配慮すること。

測定中は著しく振動を発生するような動作を行わないこと。

7.3.1.3 音

計測中は空調を停止し、音を発生する機材等（強制空冷のファンを有する機材等）は可能な限り使用しないよう配慮すること。問題になるようなレベルの騒音を発生する機材をやむを得ず使用する場合には、防音材で機材を覆うか、もしくは測定系自体を防音材で覆うような配慮をすること。たとえ計測に使用するセンサが加速度計でなくフォースセンサであっても、高感度の場合には音や振動に十分反応し、電圧出力信号にノイズとして表れ、S/N 比を低下させる原因になるため注意すること。

測定中は著しく音を発生するような動作を行わないこと。

7.3.2 運転条件

立ち上がり時の非定常の現象を測定することが目的でなければ、擾乱源は十分ならし運転を行った上で、本計測を行うこと。そして、回転数スイープ試験を行う場合には十分にゆっくりとスイープすること。

7章 参考文献

- [7.1] Ley, W., Wittmann, K., and Hallmann, W. 編集, *Handbook of Space Technology*, Wiley, 2009, 8.3.6.1 節 Special Environmental Tests
- [7.2] Elias, L. M. and Miller, D. W., “A Coupled Disturbance Analysis Method Using Dynamic Mass Measurement Techniques”, Proceedings of the 43rd Annual AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 2002, AIAA Paper 2002-1252.
- [7.3] Elias, L. M., Dekens, F. G., Basgogan, I., and Sievers L. A., “A methodology for modeling the mathematical interaction between a reaction wheel and a flexible structure”, Proceedings of SPIE Vol.4852 (2003)
- [7.4] 水晶圧電式多成分フォースプレート 9253A 取扱説明書, 日本キスラー社発行, (9253B と内容は同一)
- [7.5] Taniwaki, S., and Ohkami, Y., “Experimental and Numerical Analysis of Reaction Wheel Disturbance”, JSME International Journal. Series C, Mechanical systems, Machine Elements and Manufacturing, Vol.46, No.2, pp.519-526, 2003
- [7.6] 神澤 拓也, 谷脇 滋宗, 狼 嘉彰, 空気浮上式擾乱測定装置を用いた衛星姿勢制御用フライホイールの擾乱測定実験, 第 7 回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集, pp.266-269, 2001
- [7.7] 谷脇 滋宗, 近藤 直, 観測衛星の仮想的安定化による高分解能画像の取得, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.73, No.736, pp.3279-3286 (2007-12)
- [7.8] Seijs V. D., M. V., de Klerk D., and Rixen D. J., “General framework for transfer path analysis: history, theory and classification of techniques”, Mechanical Systems and Signal Processing. Vol.68-69, pp.217–244 (2016)

8 信号解析

本章では、7章で取得した擾乱信号（データ）に対して行う信号解析の手法、及び信号解析の前後に実施するデータ処理につき概説する。

8.1 信号解析手法

信号解析は、信号波形の検出や抽出、雑音除去、信号対雑音比（S/N比）改善及び周波数解析などを目的に、取得した信号に対して行う演算を指す。それぞれの目的に応じた解析手法やアルゴリズムが提案され、その発展は目覚ましいものがある。

本項では擾乱信号に対して最も使用頻度が高い周波数解析（スペクトル解析）について、その解析手法とアルゴリズムを紹介するに留める。

周波数解析は、対象とする信号の分類（規則的／不規則的、定常的／非定常的）によって整理できる。表 8.1-1 に信号の分類に応じた周波数解析（スペクトル解析）の手法と代表的なアルゴリズムを挙げる。

解析手法及びアルゴリズムの詳細は、参考文献[8.1][8.2][8.3]を参照頂きたい。なお、本マニュアルの付録 - VI にスペクトル解析の数学的な背景につき解説しているので参照されたい。また、代表的なパワースペクトル密度推定のペリオドグラム法（直接法）のプログラム例も掲載したので参照されたい。

表 8.1-1 周波数解析（スペクトル解析）の手法とアルゴリズム

信号の分類		解析手法	抽出量	アルゴリズム
規則性	定常性			
規則的 (確定的)	定常	フーリエ解析	振幅・位相スペクトル	離散フーリエ変換（DCT）及び高速フーリエ変換（FFT）
		スペクトル推定 (規則的／不規則的信号も扱える)	パワースペクトル密度、エネルギースペクトル、パワー	ノンパラメトリック： Blackman-Turky 法 (B-T 法)、ペリオドグラム法 (直接法) パラメトリック： 自己回帰モデルのスペクトル推定等
不規則的	定常 (エルゴード的)			
瞬時的あるいは非定常		時間－周波数解析	瞬間パワースペクトル密度	短時間フーリエ解析（STFT）、ウェーブレット解析

8.2 データ処理手順

スペクトル解析を行うに当たり、解析結果の精度を高めるため、データの取得方法の設計をはじめ、一般に以下の作業を行う必要がある。

<データ処理手順>

[1] データ処理の設計

[2] 計測 (6章)

- ① アナログ信号をアンチエイリアシングフィルターに通す。
- ② A/D 変換

[3] データ前処理

- ① 平均値を 0 とする。
- ② トレンドの除去
- ③ プリホワイトニング (スペクトルの平坦化)
- ④ 窓関数処理 (付録 - VI VI.1.5.2 項(2)参照)

[4] スペクトル解析 (8.1 項及び付録 - VI VI.1 項)

[5] 復色 (プリホワイトニングの修正) ([3]③にてプリホワイトニングを実施した場合)

[2] [4] は他項にて説明しているため、ここでは [1] [3] ([5] を含む) について解説する。

[1] データ処理の設計

計測に入る前に、スペクトル推定誤差理論に基づき、データの読み取り間隔 Δt やデータ長 T を決定する必要がある。また、スペクトル計算に当たり、精度を向上するためにスペクトル推定値の平滑化を行う必要がある。方法としては近接するスペクトル推定値 (一般に $2n + 1$ 個) を算術平均する方法と、データ列をセグメントで分割し、それぞれで FFT を行った後、同じ周波数のスペクトル推定値毎に算術平均する方法があるが、数学的に変わりはない。

以上の信号処理に係るパラメータの決定手順を以下に示す。詳細は文献[8.3]を参考されたい。(平滑化の方法は、文献[8.3]に従い、隣接するスペクトル推定値で算術平均を行うとした)

(1) 読み取り間隔 Δt の決定

エイリアシングの影響を避けて、サンプリング周波数を信号に含まれる最大の周波数の 2 倍以上とする必要がある。また、計測時にアンチエイリアシングフィルター等のローパスフィルターによりサンプリング周波数の 1/2 (ナイキスト周波数) 以上の周波数成分を除去しておくことが望ましい。

$$f_s > 2f_h \quad (8.2-1)$$

ここで、

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}$$

より、

$$\Delta t < \frac{1}{2f_h} \quad (8.2-2)$$

(2)必要とされる測定精度、周波数分解能を決定する

以下で定義される測定精度を決定する。

$$\frac{\sigma}{m}$$

ここで、 m と σ はそれぞれ測定値の平均と標準偏差であり、必要とされる周波数分解能 [Hz]から計算の最大有効帯域幅 B_e [Hz]を決定する。一般には周波数分解能よりも小さくする。

(3)データ長 T (データ数 N) の決定

スペクトル誤差理論より以下の公式が成り立つ。

$$\frac{\sigma}{m} \cong \frac{1}{\sqrt{B_e T}} \quad (8.2-3)$$

これに、(2)で決定した、測定精度 (σ/m)、最大有効帯域幅 [Hz] (B_e) よりデータ長 (T) を定める。

$$T \cong \frac{1}{B_e} \frac{1}{\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2} \quad (8.2-4)$$

測定するデータ数 N は以下より求められる。

$$N = \frac{T}{\Delta t} \quad (8.2-5)$$

(4)零の数 L の決定

FFT を実行するにはデータ数が2のべき乗である必要がある。

最近接の2のべき乗数となるよう、零の数 L を決定する。なお、市販の解析ソフトウェアでは、任意のデータ数でも可能なように、アルゴリズムにて上記の零追加が自動的に行われる場合もある。

(5)平滑数の決定

平滑化に用いる隣接スペクトル推定値の数($2n + 1$)は、必要とされる帯域幅より、以下の式から決定される。 $(n$ は最も近い上位の整数値を選ぶ)

$$(2n+1) \left(\frac{N}{N+L} \right) = B_e T \quad (8.2-6)$$

なお、スペクトル推定値の算術平均は以下で表される。 $\tilde{S}(\omega_{k+m})$ は $\tilde{S}(\omega_k)$ に隣接するスペクトル推定値、また、 $\hat{S}(\omega_k)$ は平滑化スペクトルである。

$$\hat{S}(\omega_k) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \tilde{S}(\omega_{k+m}) \quad (8.2-7)$$

[3] データ前処理[8.1][8.2]

① 平均値を 0 に設定

スペクトルの直流成分を必要としない場合は、スペクトル計算誤差を抑えるため、平均値は 0 としておくことが望ましい。具体的には平均値を求め、各データ値からを引いたものを新しいデータ列とする。

$$x_n - \bar{x}$$

なお、

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

② トレンドの除去

データ長より長い周期をもった成分をトレンドと言い、スペクトル計算誤差を抑えるため、除去しておくことが望ましい。

トレンドの除去の方法としては、以下の 2 種類が存在する。ここでは詳細を割愛するが、最小二乗法の採用が望ましい[8.2]。

- ・平均勾配法
- ・最小二乗法

③ プリホワイトニング (スペクトルの平坦化)

測定した信号に非常に強い周期性のある成分を含む場合、ある周波数 f にてスペクトル $P(f)$ の変化が急激なものとなる。この場合、窓関数等による平滑化において、平滑化の幅を著しく狭める必要が生じることで、他の周波数成分の平滑化が疑わしくなり、スペクトル推定の安定度が低下する。

そこで性質の既知なフィルターによりそのスペクトルをホワイトノイズに近づける操作を事前に施しておくことが望ましい。この操作をプリホワイトニングと呼ぶ。

なお、得られたスペクトルは本来のスペクトルに戻す操作が必要であり、これを復色化 (recoloring) と呼ぶ。

フィルターは信号の特徴に応じて様々なものが提案されており、文献[8.1]等を参考されたい。

④窓関数処理

リーケージ誤差を抑えるために、データ列に窓関数による重みづけを行い、切り出したデータ列の前後の値を滑らかに接続する(付録 - VI VI.1.5.2 項(2)参照)。なお、FFT等の後には、窓関数を掛けたことによるパワーの増減を補償する必要がある。

8章 参考文献

- [8.1] 日野 幹雄著, スペクトル解析, 朝倉書店, 1977 年
- [8.2] J.S.ベンダット, A.G.ピアソル共著, 得丸 英勝訳, ランダムデータの統計的処理, 培風館, 1976 年
- [8.3] D.E.ニューランド著, 不規則振動とスペクトル解析, オーム社, 1991 年

9 擾乱モデル作成

本章ではアウトプットである擾乱モデルの提示内容とその例を紹介する。

9.1 一般

システム側に提示する擾乱モデルは以下の構成にて提示されることを基本とする。

- A. 擾乱モデル（電子データ）（6. 2項に各擾乱モデル表現手法別に例を示す）
- B. 擾乱モデル説明書

なお、「擾乱モデル説明書」は、原則、以下の内容を含むものとする。

- ① 対象機器の概要
- ② 擾乱要求項目
擾乱要求が課される性能項目（擾乱振動、リップル、トルク変動など）を明記する。
- ③ 擾乱モデル表現手法
擾乱要求項目別の擾乱モデル表現手法を説明する。力学モデル表現では数学モデルとパラメータの解説を含む。
- ④ 擾乱モデルの解説
提示する擾乱モデルの使用条件、電子データ数値の定義や読み方を解説する。

9.2 擾乱モデル例

表現手法別の擾乱モデル提示例（パラメータ例、グラフ例）を示す。

周波数領域表現（スペクトル表現）

表現手法		パラメータ	図示
スペクトル	連続スペクトル	周波数毎の振幅スペクトル、位相 スペクトルのデータ系列 $f_1, Y(f_1), \angle Y(f_1)$... $f_i, Y(f_i), \angle Y(f_i)$... $f_n, Y(f_n), \angle Y(f_n)$	周波数－振幅ス ペクトルグラフ (例 図 9.2-1) 周波数－位相ス ペクトルグラフ Waterfall 図 (振 幅のみ) (例 図 9.2-2)
		スペクトルの関数表現 振幅： $Y(f) = F(f)$ 位相： $\angle Y(f) = G(f)$	関数の図示化
	線スペクトル	選択した線スペクトルの周波数、 振幅スペクトル、位相スペクトルの データ系列 $f_1, Y(f_1), \angle Y(f_1)$... $f_i, Y(f_i), \angle Y(f_i)$... $f_n, Y(f_n), \angle Y(f_n)$	—
パワースペクトル密度 (PSD)		周波数毎のパワースペクトル密度 のデータ系列 $f_1, \text{PSD}(f_1)$... $f_i, \text{PSD}(f_i)$... $f_n, \text{PSD}(f_n)$	周波数－振幅ス ペクトルグラフ Waterfall 図

時間領域表現

表現手法	パラメータ	図示
級数和	級数和の係数 $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)\}$ a_0 a_1, b_1 \dots a_i, b_i \dots a_n, b_n	—
理想波形近似表現	波形プロファイル (近似表現)	波形プロファイル (例 図 9.2-3)
擾乱時間波形	波形プロファイル (非近似表現)	擾乱時間波形 図 6.3.2-1~3

力学モデル表現

表現手法	パラメータ	図示
例 マスバランズ＋ 構造共振表現	物理パラメータ M, I_{rr}, k, k_{θ} ハーモニクス次数、係数 h_1, A_1, B_1, C_1, D_1 \dots h_i, A_i, B_i, C_i, D_i \dots h_n, A_n, B_n, C_n, D_n	時系列グラフ (数値シミュレーション)

統計量表現

表現手法	パラメータ	図示
統計量 平均値, σ , p-p 値	—	時系列グラフ (例 図 9.2-4)

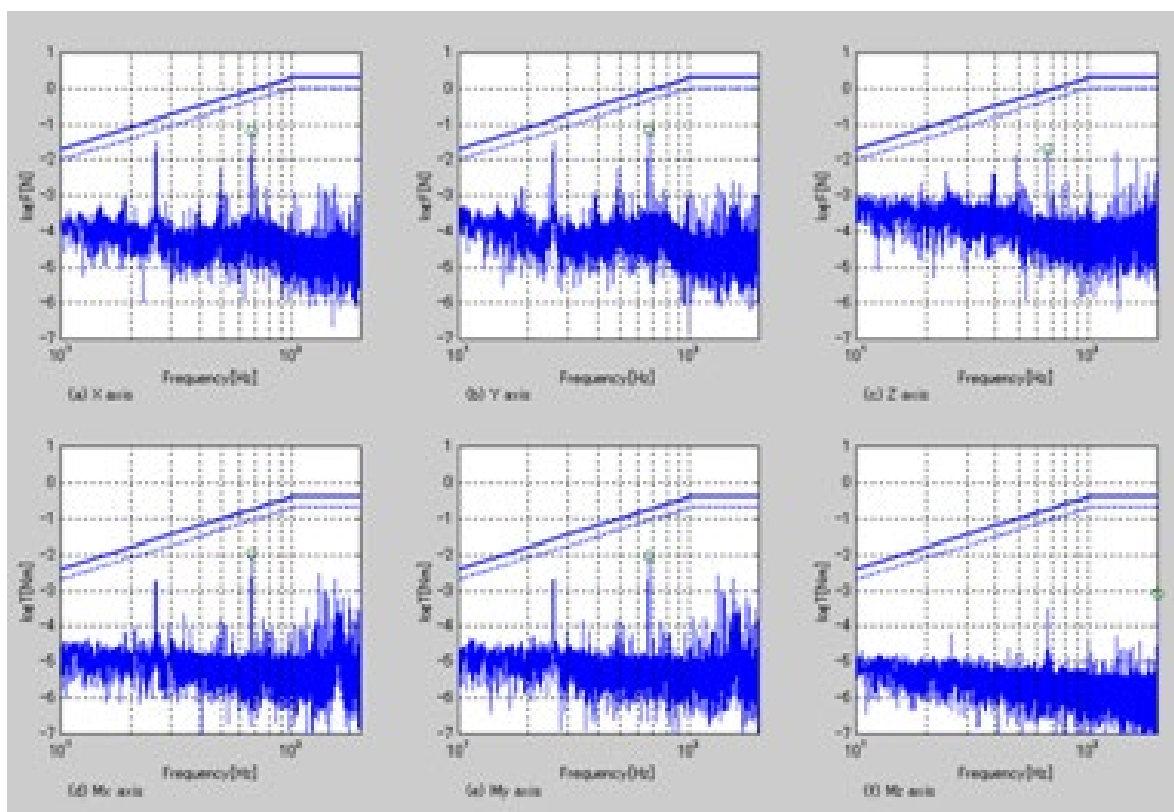


図 9.2-1 周波数-振幅スペクトルグラフ 例 (リアクションホイール)

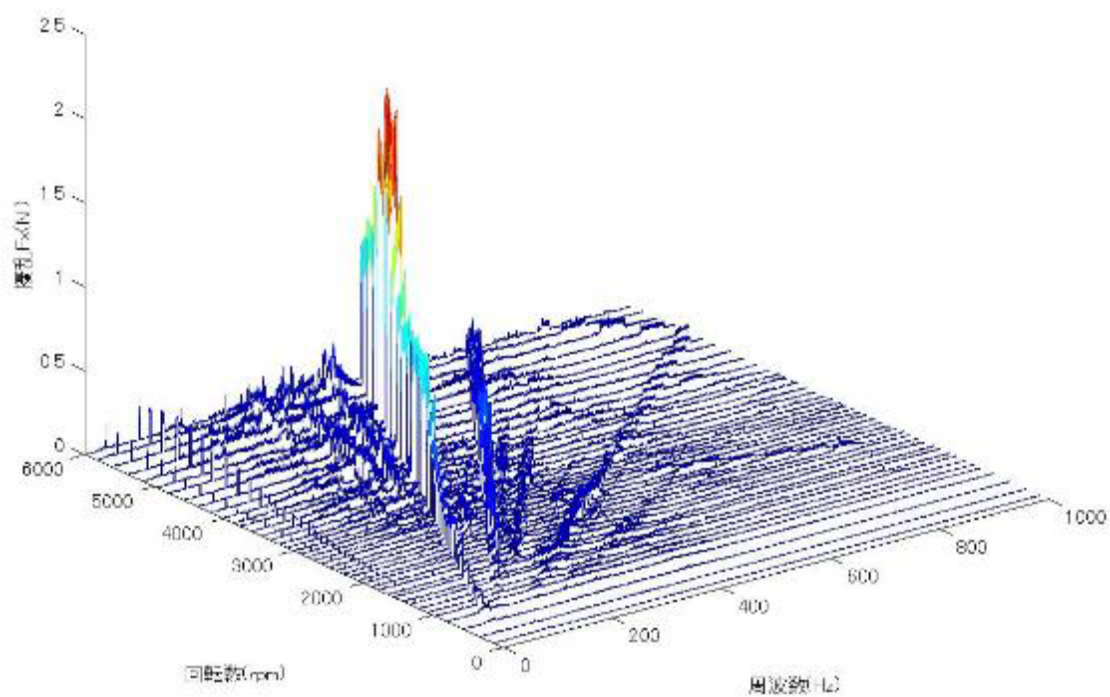


図 9.2-2 WaterFall グラフ 例 (リアクションホイール)

駆動速度	矩形駆動パターン	台形駆動パターン
擾乱角運動量 h_D h_M 0 τ_M T t $h_D = h_M : 0 \leq t \leq \tau_M, T \leq t \leq T + \tau_M, \dots$ $= 0 : \tau_M < t < T, \dots$ ここに、 h_M : 可動物による擾乱角運動量定常値 τ_M : 擾乱持続時間 T : 擾乱発生周期	h_D h_M 0 τ_0 τ_M T t $h_D = h_M t / \tau_0 : 0 \leq t \leq \tau_M, \dots$ $= h_M : \tau_0 < t < \tau_M, \dots$ $= h_M (\tau_M + \tau_0 - t) / \tau_0 : \tau_0 < t < \tau_M + \tau_0, \dots$ $= 0 : \tau_M + \tau_0 < t < T, \dots$ ここに、 h_M, τ_M, T : 同左 τ_0 : 駆動立ち上がり/立ち下がり時間	T_M τ_M τ T t
擾乱トルク T_M τ_M τ T t	T_M τ_M τ_0 τ_0 T t	T_M τ_M τ_0 τ_0 T t

図 9.2-3 理想波形近似表現と規定パラメータ (例)

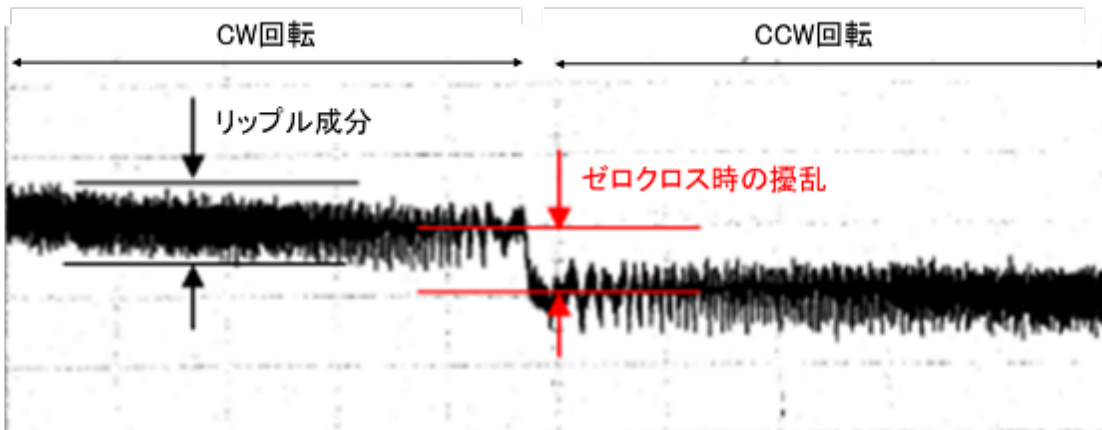


図 9.2-4 時系列グラフ 例 (リアクションホイール)

10 事例集

代表的な擾乱源の測定・評価事例として以下の機器を紹介する。

なお、ここで挙げた事例において、擾乱モデルの表現方法は、周波数領域表現と時間領域表現に限られ、力学モデル表現や統計量表現の事例は挙げていない。これは、力学モデル表現や統計量表現を用いた実績が現状は少ないためである。

- 10.1 項 ホイール
- 10.2 項 IRU (機械式ジャイロ)
- 10.3 項 冷凍機 (機械式)
- 10.4 項 パドル駆動機構


10.1 ホイール

10.1.1 機器概要

ホイールアセンブリ(ホイール駆動回路及びホイール)は、その内部のロータ(慣性モーメント)をモータにより加速あるいは減速し、その回転数を制御することにより、角運動量によるジャイロ安定効果を生じるとともに、制御トルクの発生、衛星に対する外乱トルク等の吸収による角運動量の蓄積の機能を有する。ホイールアセンブリの機能系統図を図10.1.1-1に示す。

ホイール駆動回路部分は、姿勢軌道制御電子回路からのトルク制御信号を受け、ホイールに対し電流の制御及びトルク出力方向の指令を出力する。ホイールはこれらのコマンドを受け、ホイール内部のロータを加速、減速し、衛星本体(土台側)に対してリアクショントルクを発生するとともに角運動量の蓄積を行う。表10.1.1-1に国産新型ホイール(TYPE-M)の外観及び主要性能を示す。

表 10.1.1-1 国産新型ホイール (TYPE-M) 主要性能と外観

項目	性能・諸元	外観	
角運動量	10-30Nms		
回転数制御範囲	-6000~+6000rpm		
最大制御トルク	0.1Nm 以上 (-6000~+6000rpm)		
ロストルク	0.03Nm 以下		
起動電流	200mA 以下		
擾乱	トルク		$4 \times 10^{-5} \times f^2$ Nm 以下 [10~100Hz] 4×10^{-1} Nm 以下 [100<200Hz]
	並進力		$2 \times 10^{-4} \times f^2$ N 以下 [10~100Hz] 2 N 以下 [100<200Hz]
外形・寸法	φ284×155mm 以下		
質量	9.3Kg(タイプ M@30Nms)		
寿命	15 年以上		

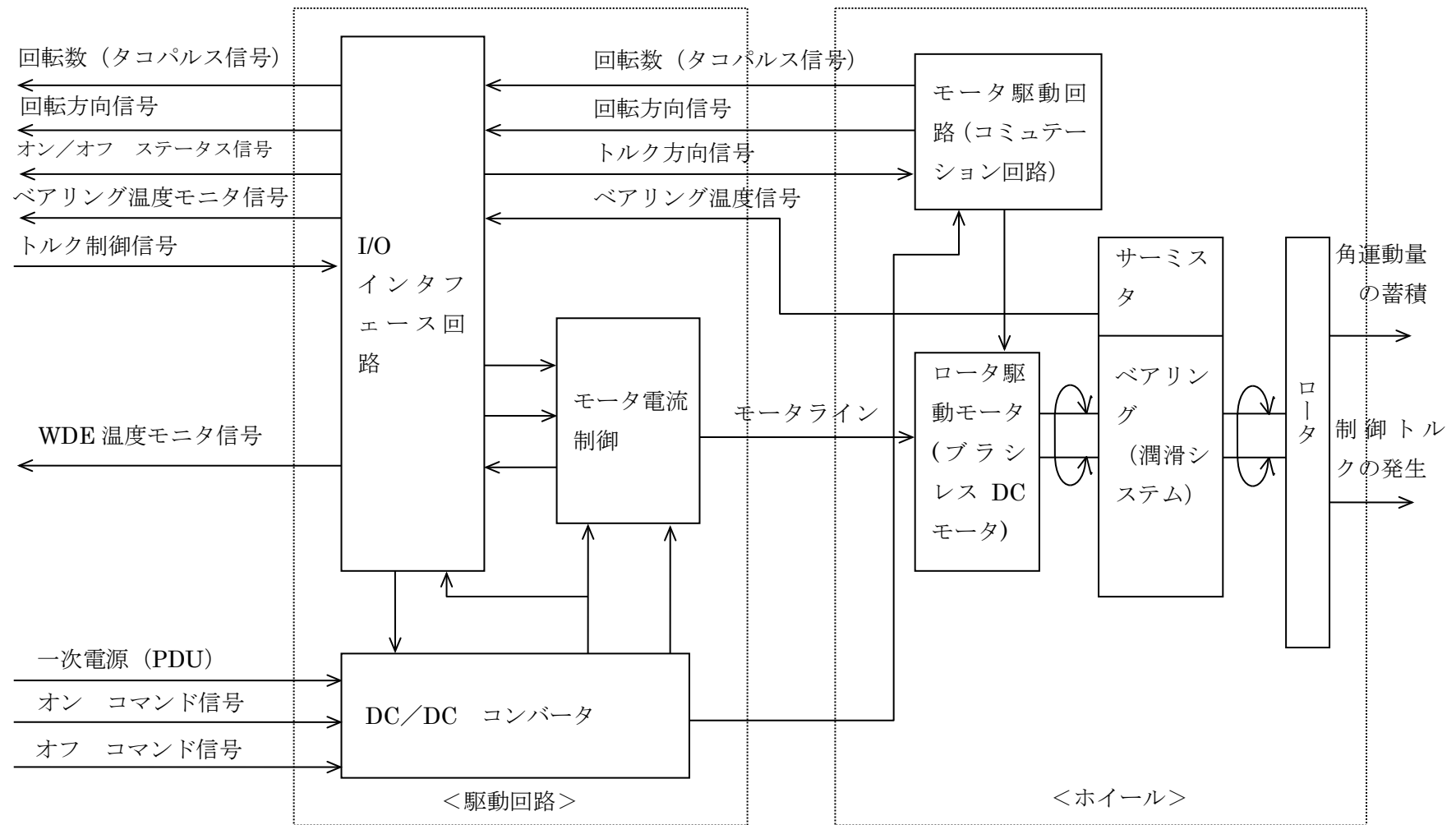


図 10.1.1-1 ホイールアセンブリ 機能系統図

10.1.2 擾乱要求項目と擾乱管理作業

ホイールアSEMBリに対して要求される代表的な擾乱要求項目と、コンポーネント製造・試験において実施する擾乱管理作業について示す。

10.1.2.1 擾乱要求項目

ホイールに要求される擾乱要求管理項目としては、以下に示す項目が挙げられる。

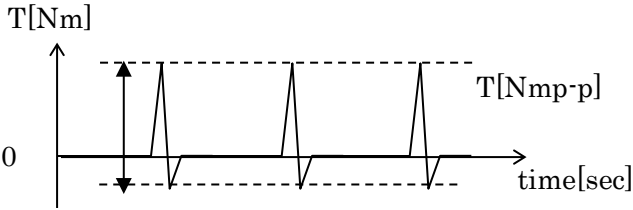
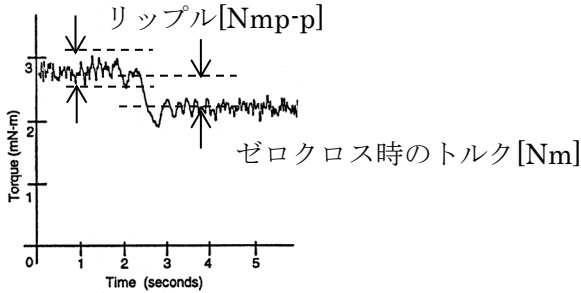
- ・ 擾乱
- ・ スタティックインバランス/ダイナミックインバランス
- ・ ロストルク変動
- ・ リップル

各要求の概略と、主要な発生要因と考えられる項目を表 10.1.2.1-1 にまとめる。

表 10.1.2.1-1(1/2) 擾乱要求管理項目 概要

擾乱要求管理項目	要求の概要	主要な発生要因
擾乱	<p>並進成分(F_x, F_y, F_z)及びトルク成分(M_x, M_y, M_z)における、周波数[Hz]に対する力[N]or[Nm]の規定</p> <p>参考として、規定のイメージを以下に示す。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;"> <div style="text-align: center;"> <p>$F[N]$</p> <p>並進成分 $f[Hz]$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$T[Nm]$</p> <p>トルク成分 $f[Hz]$</p> </div> </div>	<ul style="list-style-type: none"> ・ ベアリングの回転振動により発生する擾乱(10.1.2.1 項(1)参照) ・ ホイールの構造共振により増幅して発生する擾乱(10.1.2.1 項(2)参照) ・ スタティックインバランス/ダイナミックインバランス(10.1.2.1 項(3)参照)
スタティックインバランス/ダイナミックインバランス	<p>製造時のロータインバランスに対する要求</p> <p>スタティックインバランス(SB)とダイナミックインバランス(DB)に規定を設定する。</p> <p>SB : TBD[kgm]以下 DB : TBD[kgm²]以下</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ ロータインバランス(10.1.2.1 項(3)参照) ・ スタティックインバランス/ダイナミックインバランス

表 10.1.2.1-1(2/2) 擾乱要求項目 概要

擾乱要求項目	要求の概要	主要な発生要因
ロストルク 変化	<p>一定の回転数にて回転している状態での、時間[s]に対するトルク変化量[Nm]の規定</p> <p>主にオイルジョグ等、ベアリング潤滑系のトルク変化を評価する。</p> <p>参考として、規定のイメージを以下に示す。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 回転トルクむら (10.1.2.1 項(4)参照) ・ ベアリングオイルジョグベアリング潤滑系に起因したトルク変化
リップル	<p>出力トルクに対するトルクリップルの規定と、ゼロクロス時に生じるトルク変動に対する規定。</p> <p>参考として、規定のイメージを以下に示す。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ・ モータ駆動トルクの変動により発生する擾乱(10.1.2.1 項(5)参照) ・ トルクリップル/コギングトルク ・ ホイールゼロクロス時の摩擦変化により発生するトルク

上記の要求項目に対する主要な要因について、発生メカニズム及び概要を次項に示す。

10.1.2.2 発生要因の概略

(1) ベアリングの回転振動により発生する擾乱

ベアリングノイズはベアリングの不規則性により発生する擾乱で、次の4構成品の不規則性により生じる。そして、それぞれ固有の擾乱周波数をもつ。

- ・ 保持器（リテーナ（Retainer）またはケージ（Cage）とも呼ぶ）
- ・ ボール（Ball）
- ・ インナーレース（Inner Race）
- ・ アウターレース（Outer Race）

これにより発生する擾乱の周波数は、それぞれの部分の公転周期に起因するもので、ホイール回転数の半分から数倍程度の領域に存在し、ホイール回転数の非整数倍になるのが特徴である。各部の1箇所の不完全性（質量や寸法の誤差等）を仮定したとき、予測される周波数の計算式を示す。

(a) リテーナ(公転)に起因する周波数： n_c

リテーナ(=ボール)が変心している場合、リテーナの偏心アンバランス量により、トルク変動が公転周波数で発生する。リテーナの回転数 (n_c : 内輪回転のベアリングの公転数)は、次のように現される。

$$n_c = (1 - \gamma) \frac{n_I}{2} = (1 - \gamma) \frac{\omega}{2} \quad (10.1.2-1)$$

ここで、

- n_c : 公転周期（保持器回転数）
- n_I : 内輪回転速度（ $=\omega$ ）
- γ : $\gamma = D_w \cos \alpha / D_{pw}$
- D_{pw} : 転動体ピッチ径（mm）
- D_w : 転動体直径（mm）
- α : 接触角（°）

(b) ボールに起因する周波数： S_b

ボールに欠陥があった場合は、ボールの自転周波数に一致した振動が発生する。

$$S_b = 2n_a = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) \frac{n_I}{2} \cos \alpha \times 2 = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) \frac{\omega}{2} \cos \alpha \times 2 \quad (10.1.2-2)$$

ここで、

- n_a : 回転動体の自転数

(c)外輪に起因する周波数： S_o

外輪に欠陥がある場合には、ボールが欠陥部を通過する時に振動が発生するために、リテーナ公転周波数（＝ボールの公転周波数）のボール数（ Z ）倍の周波数で振動が発生する。

$$S_o = n_c Z = \omega Z \quad (10.1.2-3)$$

(d)内輪に起因する周波数： S_I

内輪に欠陥がある場合には、ボールが欠陥部を通過する時に振動が発生するために、振動が発生する。

$$S_I = (1 - n_c)Z = (1 - \omega)Z \quad (10.1.2-4)$$

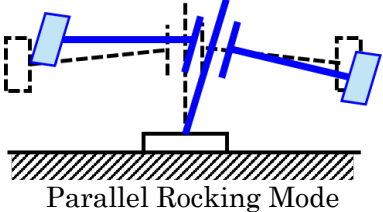
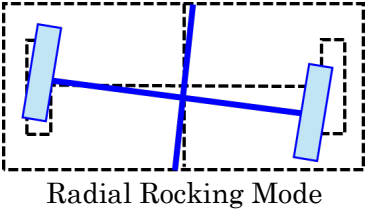
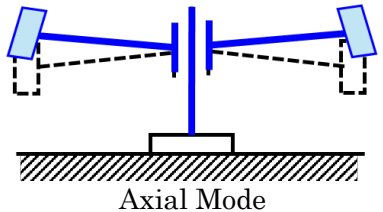
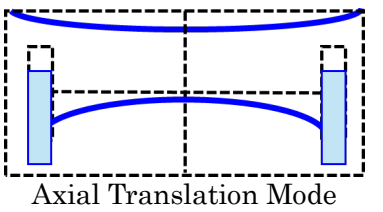
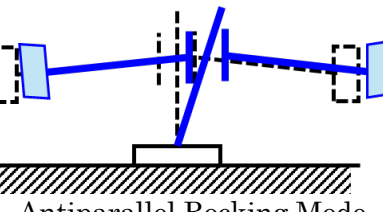
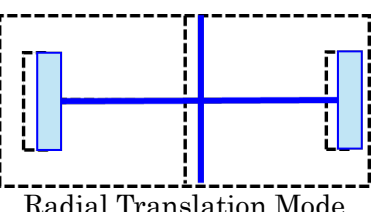
擾乱の成分としては、回転軸に直交する 2 軸の擾乱力 (F_X, F_Y) と、3 軸の擾乱トルク (T_X, T_Y, T_Z) が発生する。

また、上記(a)～(d)発生要因については、ホイール内部の非線形要素を介して各要因基本周波数（1 倍）に加え、倍数調波（2 倍、3 倍、4 倍・・・）及び各擾乱要因の和差調波が発生する。

(2) ホイールの構造共振により増幅して発生する擾乱

姿勢制御用ホイールの代表的な 3 つの構造共振モードを表 10.1.2.2-1 に示す。

表 10.1.2.2-1 姿勢制御用ホイールの固有モード形状と名称 [10.1]

	ベアリング片側支持型ホイール	ベアリング両側支持型ホイール
軸直交回り 回転 (首振り)	 Parallel Rocking Mode	 Radial Rocking Mode
軸方向並進	 Axial Mode	 Axial Translation Mode
半径方向 並進	 Antiparallel Rocking Mode	 Radial Translation Mode

構造共振による擾乱は、ホイールの回転に伴って発生する擾乱が構造共振を励起することによって発生する。したがって、構造共振による擾乱は、それ自身が擾乱源ではなく、他の擾乱源と複合することによって励起される擾乱である。

また、構造共振は、他の擾乱源の周波数が一致したとき、構造共振を起こし、擾乱を増幅することがある。このため、ホイールの回転数が変化すると、構造共振による擾乱成分の大きさは変化する。したがって、構造共振の周波数は、構造解析や試験により確認する必要がある。

(3) ロータインバランス

(a) スタティックインバランス (SB: 静的不釣り合い)

ロータの回転中心から、不釣り合い質量半径 (r) と不釣り合いの質量 (m) の積で定義される。(図 10.1.2.2-1(a)参照)

$$U_s = mr \quad (10.1.2-5)$$

回転数を ω とすると、静的不釣り合いにより、回転数の2乗に比例する、回転軸に直交する面内の並進擾乱が発生する。

$$F_d = U_s \omega^2 \quad (10.1.2-6)$$

この擾乱はホイールが衛星の質量中心から離れた位置に配置されていると、衛星には回転擾乱としても作用する。

静的不釣り合いにより発生する擾乱周波数としては、

スタティックバランス (SB) → 並進擾乱周波数 = (回転周波数) × 1 倍
の周波数に現れる。

(b) ダイナミックインバランス (DB: 動的不釣り合い)

回転の中心から、不釣り合い質量半径 (r) と、不釣り合い質量間軸方向距離 (d) 及び不釣り合いの質量 (m) の積で定義される (図 10.1.2.2-1(b)参照)。

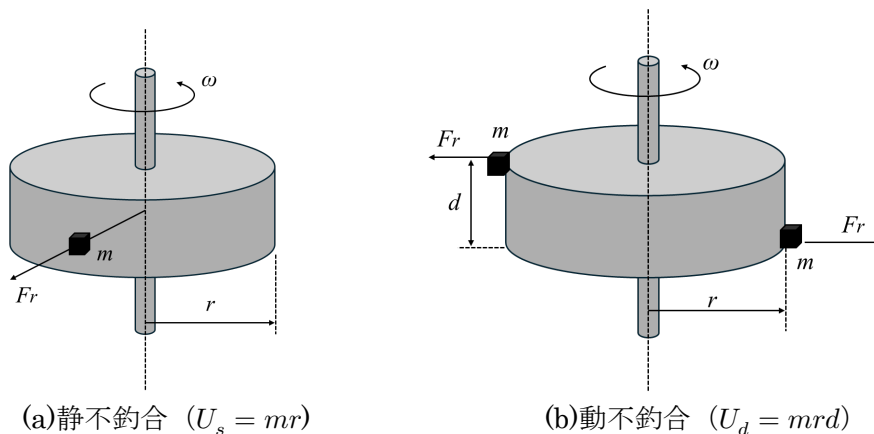


図 10.1.2.2-1 ホイールのロータ不釣り合い量の定義

動的不釣合いは回転中心と慣性主軸が一致していないことにより発生する。

$$U_d = mrd \quad (10.1.2-7)$$

回転数を ω とすると、動的不釣合いにより、回転数の2乗に比例する、回転軸に直交する軸まわりの回転（トルク）擾乱が発生する。

$$T_d = U_d \omega^2 \quad (10.1.2-8)$$

動的不釣合いにより発生する擾乱周波数としては、

ダイナミックバランス (DB) → トルク擾乱周波数 = (回転周波数) × 1 倍の周波数に現れる。

上記(a)(b)のインバランスについては、ホイール内部の非線形要素を介して各要因基本周波数(1倍)に加え、倍数調波(2倍、3倍、4倍・・・)及び各擾乱要因の和差調波が発生する。

(c)ワブル角 (wobble angle)

動的不釣合いを主軸に対する回転軸の変位角とみて、その変位角をワブル角として定義する場合もある。

なお、ワブル角は

$$\frac{2\delta mr}{I_S - I_T} \quad [\text{rad}] \quad (10.1.2-9)$$

で表され、 I_S は回転軸まわりの慣性モーメント、 I_T は回転軸と直交する軸まわりの慣性モーメントである。

(d)質量中心オフセット及び慣性主軸の回転軸からの傾き

静不釣合 U_s と動釣合 U_d については、次式の形で表現することもできる。

$$\begin{aligned} U_s &= M\delta \\ U_d &= (I_S - I_T)\gamma \end{aligned} \quad (10.1.2-10)$$

ここに、

- M : ホイールロータ部質量(kg)
- δ : ホイールロータ部の質量中心オフセット(m)
- γ : ホイールロータ部慣性主軸の回転軸からの傾き(rad)
- I_S : ホイールロータ部の回転軸回り慣性モーメント(kg・m²)
- I_T : ホイールロータ部の回転直交軸回り慣性モーメント(kg・m²)

また、ホイールロータの回転軸を Z_R 軸、 Z_R 軸に直交するロータに固定した2軸を X_R 、 Y_R とすると、 U_d は $X_R - Z_R$ 面内および $Y_R - Z_R$ 面内のホイールロータ部慣性乗積 I_{XZ} 、 I_{YZ} と以下の関係がある。

$$U_d = \sqrt{I_{XZ}^2 + I_{YZ}^2} \quad (10.1.2-11)$$

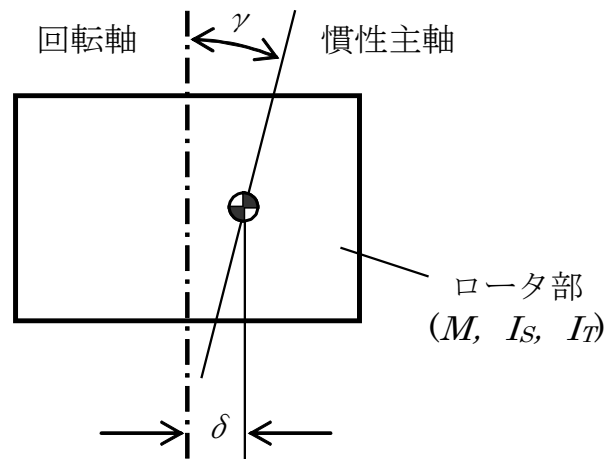


図 10.1.2.2-2 ホイールロータ部の質量中心オフセット(δ)と慣性主軸傾角(γ)の定義

(4) 回転トルクむら(ベアリングオイルジョグ)

回転トルクむら(ロストルク変化)については、ベアリング部の潤滑油のダイナミクスに関係し、回転に伴って油膜の非一様性が現れ、その状態が時間とともに変化することによって生じる。

これらはオイルジョグと称され、ベアリングオイルによるベアリング摩擦トルクの変動であり、回転周期には同期しない。

オイルジョグの発生間隔は数秒～数十秒の間隔で発生し、発生頻度は数分後に発生する場合もあれば、数ヶ月後に発生することもあり、ランダムに発生する。

ホイール状態の回転トルクむら(ロストルク変化)の波形(トルク変化の周期、立ち上がり波形/立ち上がり立下波形等)は、ベアリング単体の典型的なオイルジョグ波形と類似していることから、ベアリング単体のオイルジョグに起因したものである。ベアリング単体の典型的なオイルジョグ波形を図 10.1.2.2-3 に示す。

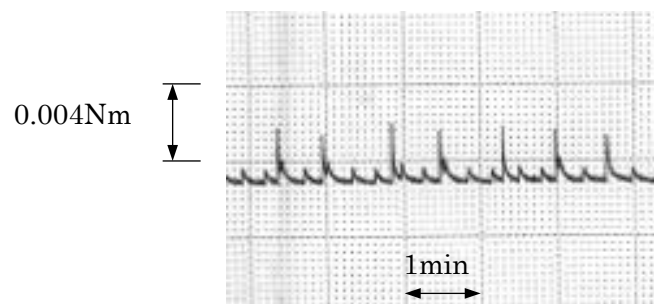


図 10.1.2.2-3 ベアリング単体の典型的なオイルジョグ波形

(5) モータ駆動トルク変動により発生する擾乱

(a) トルクリップル/コギングトルク

トルクリップルは、モータの整流 (Commutation) と逆起電力に起因して発生するトルク変動で (図 10.1.2.2-4 参照)、擾乱周波数はモータ極数と相数の積になる。

一方、コギングトルク (別名、Detent Torque とも言う) は、ステータリラクタンスの周方向の非一様性によるもので、擾乱周波数はモータ極数に比例する。コギングトルクは、モータの回転によって発生するトルクリップルと異なり、モータが静止していても存在する。また、空芯コイルの場合には、理論上コギングトルクが存在しない。

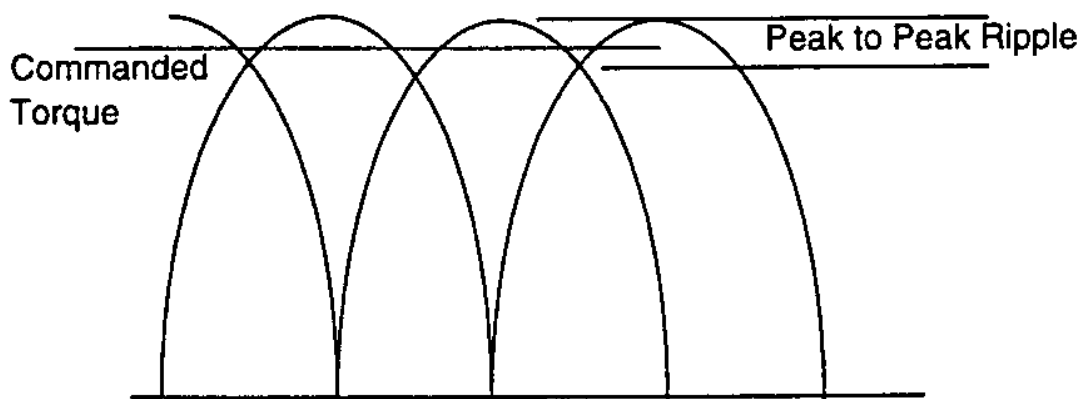


図 10.1.2.2-4 ホイールのトルクリップル [10.2]

(b) ホイールゼロクロス時の摩擦変化により発生する擾乱

姿勢制御用ホイールを正逆反転させて使用する場合、回転数 0rpm を通過する時に静摩擦領域から、動摩擦領域へ移行する過程において摩擦が変化するために発生する擾乱である。

動摩擦を Rolling Friction、静摩擦を Breakaway Torque、ゼロクロス時に発生する不連続な摩擦トルクをスティクション (Stiction) と呼んでいることもある。

図 10.1.2.2-5 は、当初ホイールが逆回転している状態で、定電流を加えてホイール加速した場合に、ホイールが発生するリアクショントルク (ホイールから衛星本体に与えられるトルクに等しい) の変動の様子を示したものである。縦軸はホイールの発生トルク、横軸はホイール回転数 ω を示す。

図 10.1.2.2-6 にホイールゼロクロス時に発生する擾乱トルクの時間波形例を示す。

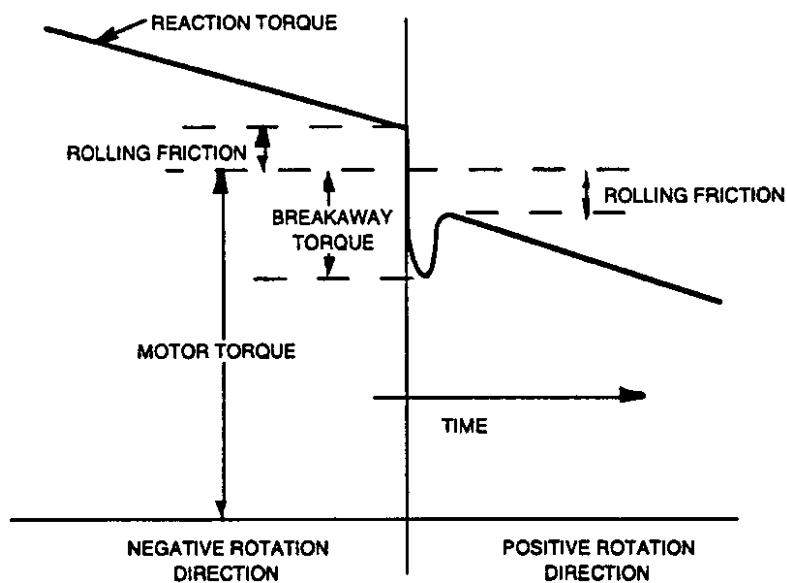


図 10.1.2.2-5 ホイールゼロクロス時の擾乱トルク [10.2]

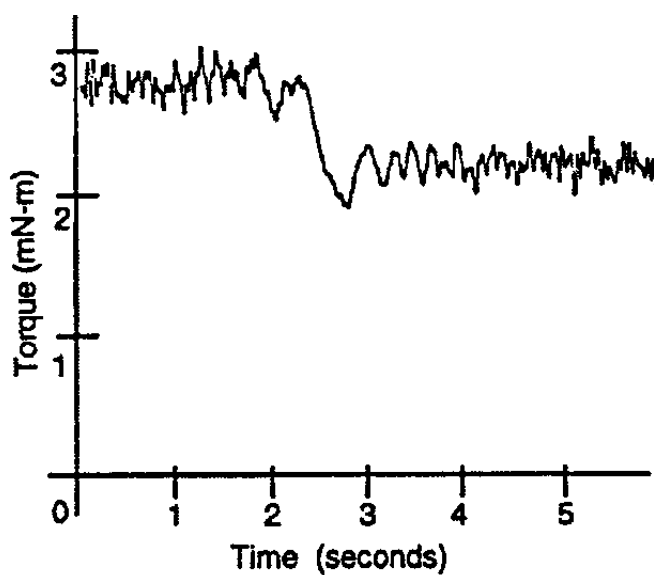


図 10.1.2.2-6 ホイールゼロクロス時の擾乱トルク時間波形例 [10.2]

10.1.2.3 擾乱管理作業

10.1.2.1 項に挙げた擾乱要求項目に対し、項目別の製造・試験時における管理作業の概要を表 10.1.2.3-1 に示す。

製造及び試験時に表に示す調整/評価を実施し、要求に対するホイールの擾乱特性を管理している。

各項目の詳細については、10.1.3 項に示す。

表 10.1.2.3-1(1/2) 擾乱要求項目に対する管理作業

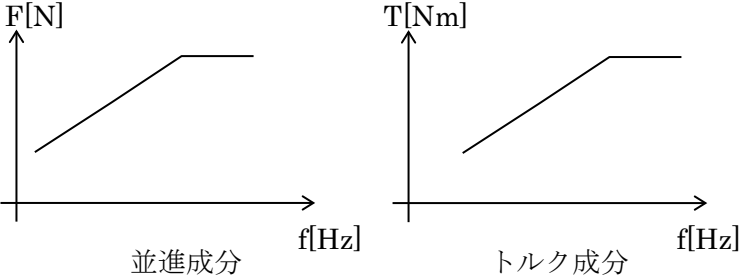
要求項目	製造時 管理作業	試験時 管理作業									
<p>擾乱</p> <p>並進成分(F_x、F_y、F_z)及びトルク成分(M_x、M_y、M_z)における周波数[Hz]に対する力[N]or[Nm]の規定</p> 	<p>ベアリング単体において選定及び評価を実施</p> <p>LSD 測定 Axial 成分振動測定</p>	<ul style="list-style-type: none"> キスラーテーブル及びエアテーブルを使用した擾乱測定により評価(発生周波数のピークレベルから推定) 構造共振については、振動試験時に共振周波数を確認 擾乱測定は、計測器の制約から周波数範囲を分割して評価している。以下に分割の範囲を示す。 <table border="1" data-bbox="1335 547 2020 762"> <thead> <tr> <th>成分</th> <th>低周波域 (10Hz 以下)</th> <th>高周波域 (10Hz 以上)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>F_x、F_y、F_z 成分 M_x、M_y、M_z 成分</td> <td>エアテーブル</td> <td>キスラー テーブル</td> </tr> <tr> <td>M_z 成分</td> <td>周期計測</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>測定条件等については以下に示す項に記載する。</p> <ul style="list-style-type: none"> キスラーテーブルを使用した擾乱測定：7.3.1 項 エアテーブルを使用した擾乱測定：7.3.2 項 周期計測を使用した擾乱測定：7.3.3 項 	成分	低周波域 (10Hz 以下)	高周波域 (10Hz 以上)	F _x 、F _y 、F _z 成分 M _x 、M _y 、M _z 成分	エアテーブル	キスラー テーブル	M _z 成分	周期計測	
成分	低周波域 (10Hz 以下)	高周波域 (10Hz 以上)									
F _x 、F _y 、F _z 成分 M _x 、M _y 、M _z 成分	エアテーブル	キスラー テーブル									
M _z 成分	周期計測										
<p>スタティックインバランス (SB) /ダイナミックインバランス (DB)</p> <p>製造時のロータインバランスに対する規定 スタティックインバランスとダイナミックインバランスに規定を設定する。 SB : TBD[kgm]以下 DB : TBD[kgm²]以下</p>	<p>balancingマシンを使用したロータバランス調整を実施 回転シャフトとベアリング軸とのアライメントを確認して組立</p>	<ul style="list-style-type: none"> balancingマシンを使用したロータバランス値計測 キスラーテーブルを使用した擾乱測定により評価(回転数に同期した周波数成分(1N 成分)ピークレベルから推定) <p>測定条件等については以下に示す項に記載する。</p> <ul style="list-style-type: none"> キスラーテーブルを使用した擾乱測定：7.3.1 項 									

表 10.1.2.3-1(2/2) 擾乱要求項目に対する管理作業

要求項目	製造時 管理作業	試験時 管理作業
<p>ロストルク変化</p> <p>一定の回転数にて回転している状態での、時間[s]に対するトルク変化量 (AC 成分) [Nm]の規定</p>	<p>ベアリング単体において選定及び評価 ランニング摩擦トルク試験におけるオイルジョグの評価</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 周期計測により回転周期の変化からロストルク変動を算出して評価 <p>測定条件等は、以下に示す項に記載する。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 周期計測を使用した擾乱測定：7.3.3 項
<p>リップル</p> <p>出力トルクに対するトルクリップルの規定と、ゼロクロス時に生じるトルクに対する規定</p>	<p>設計段階にて低トルクリップル/コギングトルクを実現するモータ設計を実施</p>	<ul style="list-style-type: none"> • トルクリップルメータを使用した測定により評価(回転トルクの計測から評価) <p>測定条件等は、以下に示す項に記載する。</p> <ul style="list-style-type: none"> • トルクリップルメータを使用した擾乱測定：7.3.4 項

10.1.3 擾乱要求項目別の測定・評価方法

10.1.2 項に示した、擾乱要求項目に対する擾乱管理作業について、試験時の擾乱評価方法の概要を示す。

10.1.3.1 キスラーテーブルを使用した擾乱測定

キスラーテーブルはベアリング回転振動、ホイール構造共振、ロータインバランスの評価に用いられている。

(1) 試験条件

キスラーテーブルを使用した擾乱測定は X、Y、Z 軸に発生する並進成分 (F_x 、 F_y 、 F_z 成分) と各軸周りに発生するトルク成分 (M_x 、 M_y 、 M_z 成分) を評価する。測定時には取り付け用の治具を介してホイールをキスラーテーブルに設置し、10Hz 以上の範囲にて擾乱を測定する。(図 10.1.3.1-1 参照)

データは以下に示す条件にて取り込み、FFT 処理後の波形に対して評価を行う。

測定回転数：	評価回転数にて、一定のモータ電流で回転させ測定
評価周波数帯域：	10Hz 以上
サンプリング周波数：	3kHz
アナログフィルタ (LPF)：	1kHz
測定時間：	約 80sec

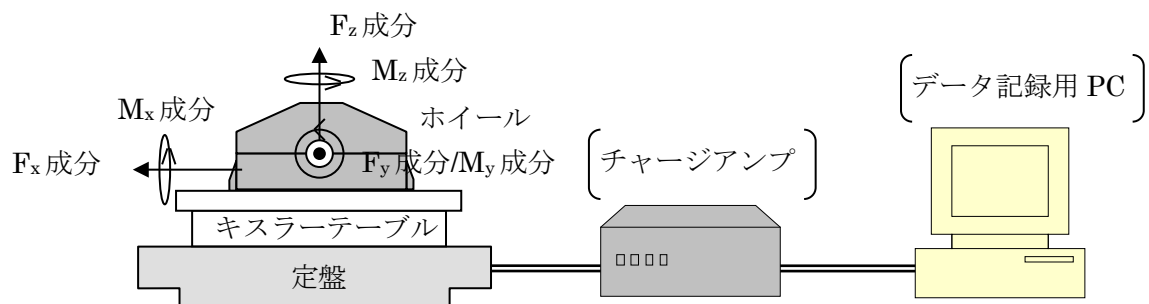


図 10.1.3.1-1 擾乱測定コンフィギュレーション

(2) 評価結果例

評価結果の例として、高速回転ホイール TYPE-M における 4000rpm での測定結果を図 10.1.3.1-2 に示す。図中における点線は、製造時における擾乱の目標値であり、実線は環境印加時における擾乱の目標値である。

擾乱測定結果にてピークの発生する成分については、10.1.2 項にて記載したバランス、ベアリング、構造共振等の成分が推定されるが、本ホイールにおける測定結果では、初期性能試験の時点からロータ不釣り合い成分とリテーナ成分がピークとして確認できる。

また、各回転数における FFT データからウォーターフォールを作成し評価することで、ピークの推移や全体的な擾乱レベルを確認できる。参考として、図 10.1.3.1-2 に示した計測結果におけるウォーターフォール(50~4000rpm)を図 10.1.3.1-3 に示す。1N 成分の推移(回転数の 2 乗に比例)や、構造共振等による回転数に依存しないピーク等が確認でき、各回転数における擾乱を全体的に捉えることができる。ウォーターフォール測定時には、コーストダウンでの測定と一定速度で測定する 2 つの方法がある。

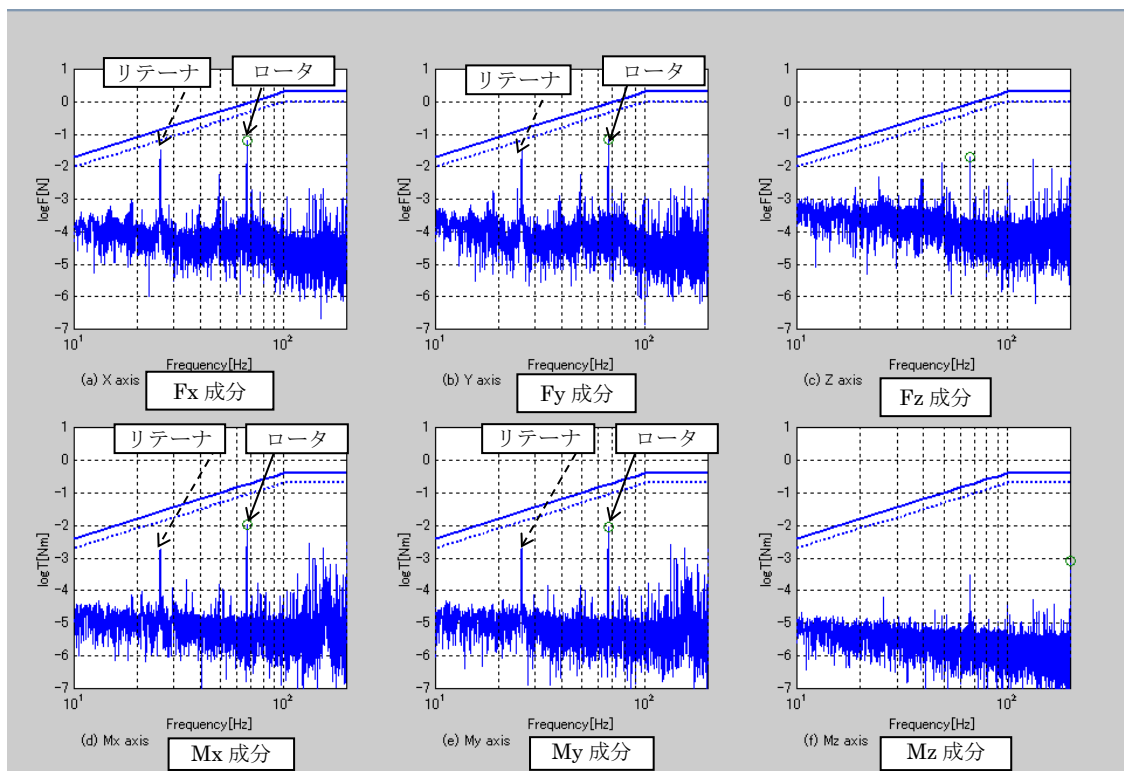
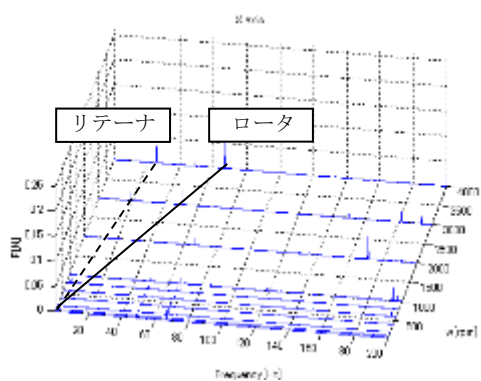
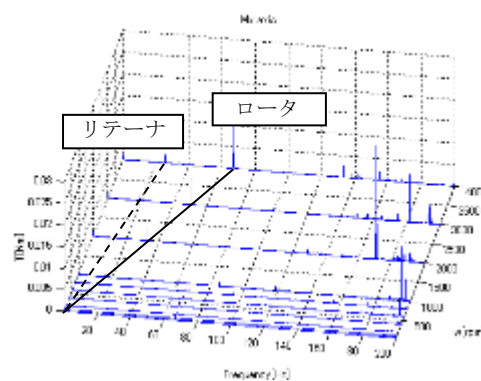


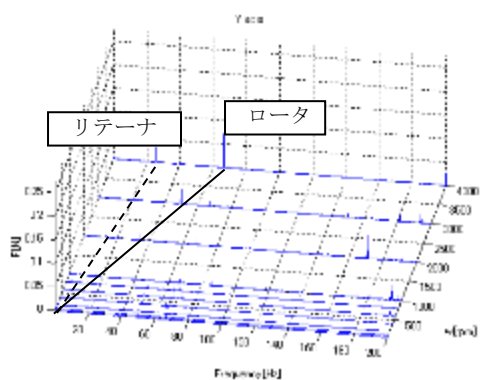
図 10.1.3.1-2 国産新型ホイール TYPE-M 擾乱測定結果(4000rpm)



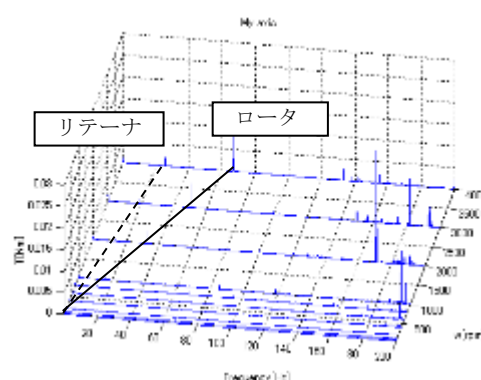
(a) Fx 成分



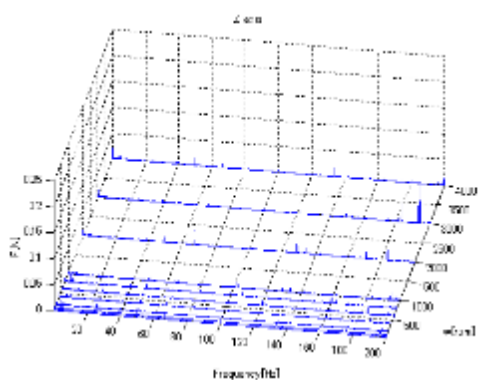
(d) Mx 成分



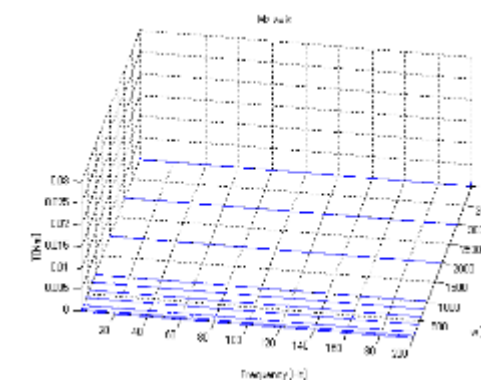
(b) Fy 成分



(e) My 成分



(c) Fz 成分



(f) Mz 成分

図 10.1.3.1-3 国産新型ホイール TYPE-M 擾乱測定結果ウォーターフォール (50~4000rpm)

10.1.3.2 エアテーブルを使用した擾乱測定

エアテーブルはベアリング回転振動、ホイール構造共振、ロータインバランスの評価に用いられている。

(1) 試験条件

エアテーブルを使用した擾乱測定は、エアパッドにより供試体を浮上させ、レーザー変位計により浮上部と固定部に生じる揺れ（変位）から擾乱を評価するものである。

測定時には取り付け用の治具を介してホイールをエアテーブルに設置し、10Hz 以下の範囲にて擾乱を測定する。（図 10.1.3.2-1 参照）

測定する成分により、ホイールを SAH（横向き）又は、SAV（直置き）の姿勢でエアテーブルに取り付ける。（図 10.1.3.2-2 参照）

データは以下に示す条件にて取り込み、FFT 処理後の波形に対して評価を行う。

測定回転数：	評価回転数にて、一定のモータ電流で回転させて測定
評価周波数帯域：	10Hz 以下
サンプリング周波数：	200Hz
測定時間：	約 400sec

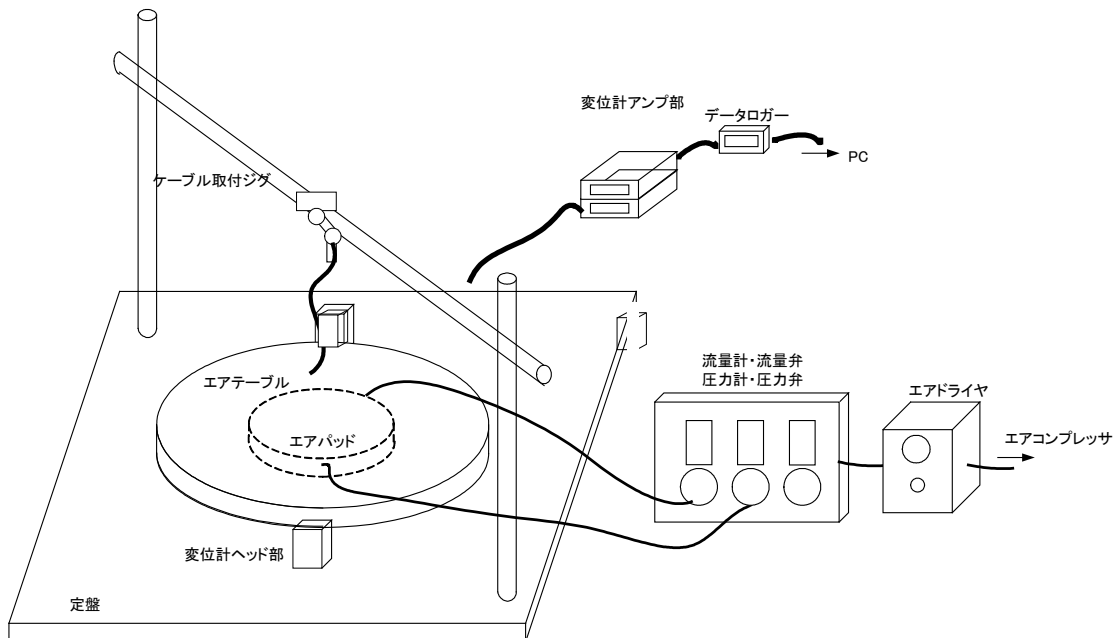
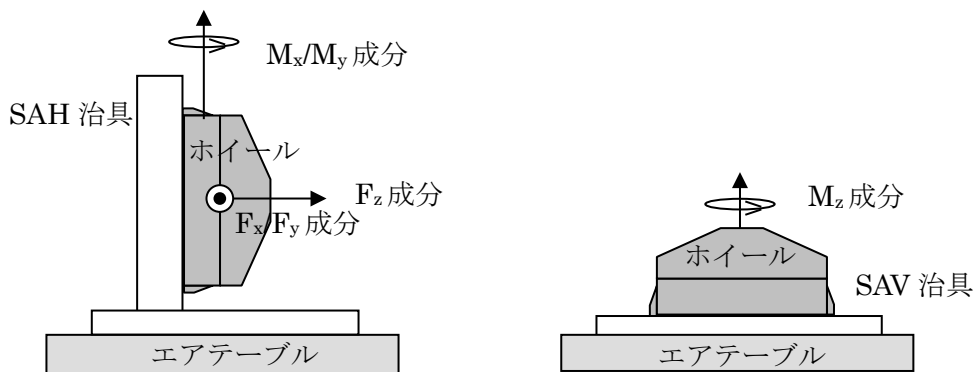


図 10.1.3.2-1 エアテーブルを用いた測定系の概略 [10.3][10.4]



(a) SAH での測定コンフィギュレーション (b)SAV での測定コンフィギュレーション

図 10.1.3.2-2 擾乱測定コンフィギュレーション

(2) 評価結果例

評価結果の例として、エアテーブル調整時のバックグラウンドデータ(並進成分)を図 10.1.3.2-3 に示す。

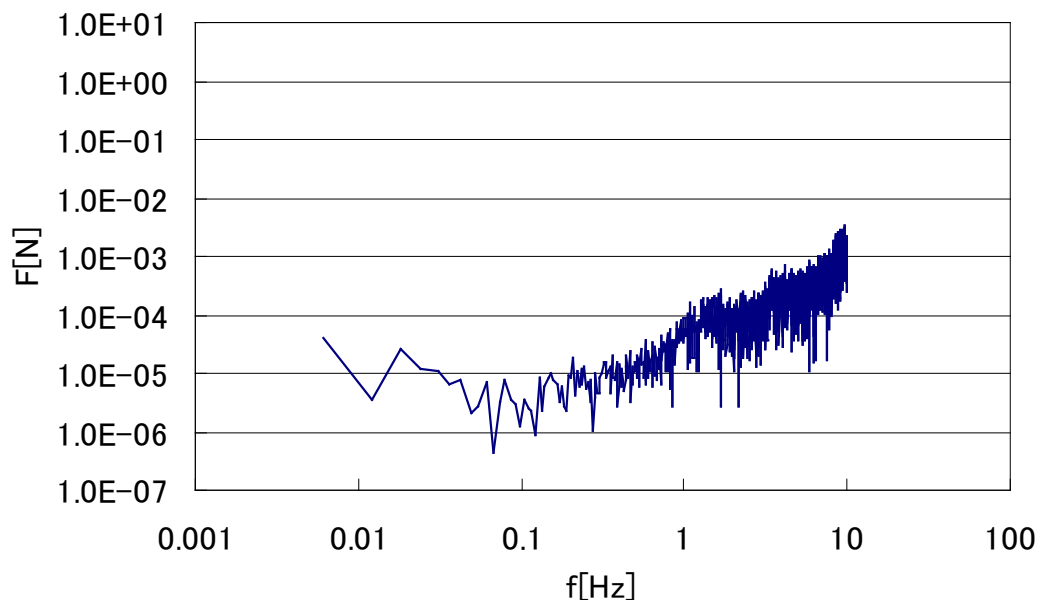


図 10.1.3.2-3 エアテーブル調整時のバックグラウンドデータ(並進成分)

10.1.3.3 周期計測による擾乱測定(回転トルクむら(ロストルク変化)の評価に適用)

(1) 試験条件

周期計測による擾乱特性評価では、回転軸周りの擾乱特性 (M_z 成分) を時系列波形及び FFT 波形にて評価する。

モータ電流を一定にてホイールを回転させ、1 回転する間に出力されるタコパルス (48～96 Pulse/rev) の時間を計測する。1 回転する時間の差からトルク変動を算出し、軸周りの回転むら (ロストルク変化) として評価する。測定概念図を図 10.1.3.3-1 に示す。

データは以下に示す条件にて計測し、ロストルク変動 (時系列波形) での評価と、擾乱 (FFT 処理を実施した波形) に対する評価の、2 通りの評価を行う。

- 測定回転数： 評価回転数にて、一定のモータ電流で回転させて測定
- 評価周波数帯域： キスラーテーブルの測定可能範囲で要求される帯域 (10Hz 以下の周波数)
- サンプリング周波数： 回転周波数に対応した周波数 (1 回転の時間を計測するため、回転周波数での計測となる)
- 時系列波形評価時のフィルター処理： 要求される帯域のフィルター処理を実施
- 測定時間： 約 300sec

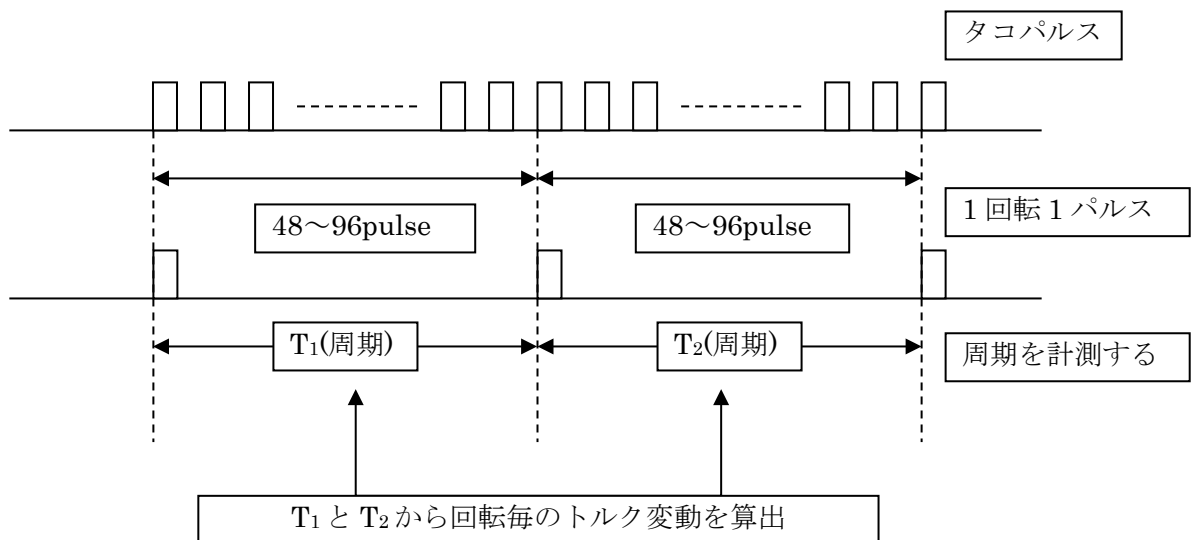


図 10.1.3.3-1 周期計測 概念図

(2) 評価結果例

評価結果の例として、高速回転ホイールの 4000rpm における測定結果 (FFT 処理) を図 10.1.3.3-2 に示す。

図中の実線は擾乱の目標値を示しており、キスラーテーブルにおけるトルク成分の目標値と同値であるが評価周波数帯域は 0.1~10Hz の周波数帯域となる。

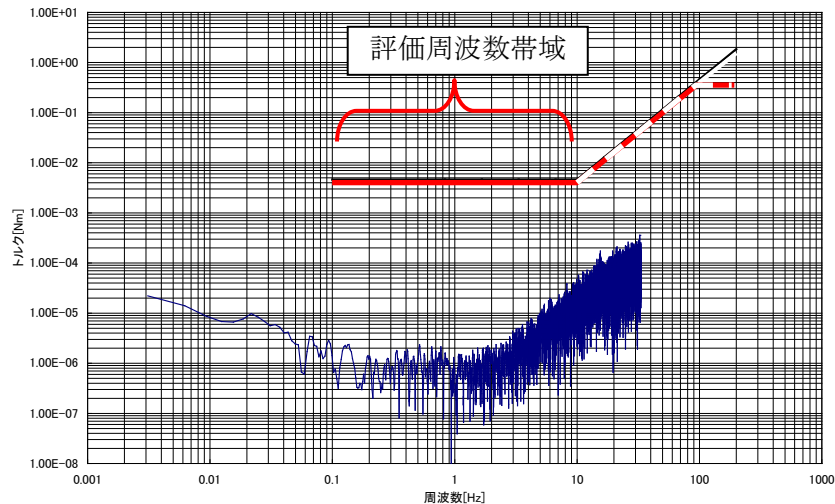


図 10.1.3.2-2 国産新型ホイールの回転数 (4000rpm) での周期計測による擾乱測定 (Mz 成分)

10.1.3.4 トルクリップルメータを使用した擾乱測定

トルクリップルメータはトルクリップル、コギングトルク、ゼロクロス時の擾乱評価に用いられている。

(1) 試験条件

トルクリップルメータにおける擾乱特性評価では、回転軸周りの擾乱特性 (Mz 成分) を時系列波形にて評価する。測定時には取り付け用の治具を介してホイールをトルクリップルメータに設置し、50Hz 以下の範囲にて擾乱を測定する。(図 7.3.4-1 参照)

データは以下に示す条件にて計測し、時系列波形に対して評価を行う。

- | | |
|------------------|---|
| 測定項目： | ゼロクロス時のトルク波形を計測し、max-min を評価(加速トルクを数種類にて実施) |
| 評価周波数帯域： | 50Hz 以下 |
| アナログフィルター (LPF)： | 50Hz を 2 段使用 |

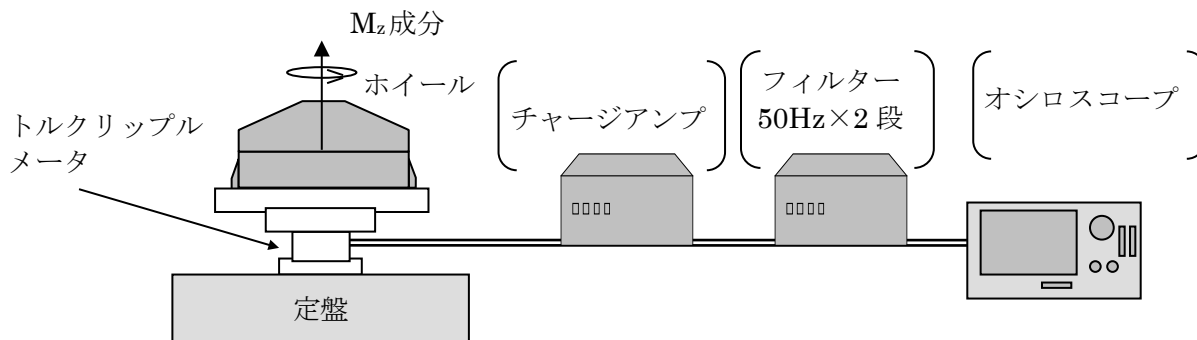


図 10.1.3.4-1 トルクリップルメータを使用した測定コンフィギュレーション

(2) 評価結果例

評価結果の例として、高速回転ホイール TYPE-M の低出力トルク (0.01Nm 以下) におけるゼロクロス時の測定結果を図 10.1.3.4-2 に示す。

測定されたトルク波形において、CW/CCW 回転時の波形における Peak to Peak が、ホイールのリップル成分を表しており、ゼロクロス時に見られるトルク波形の DC レベルの段差が、ゼロクロス時のトルク摩擦トルク変化により発生する擾乱を示している。

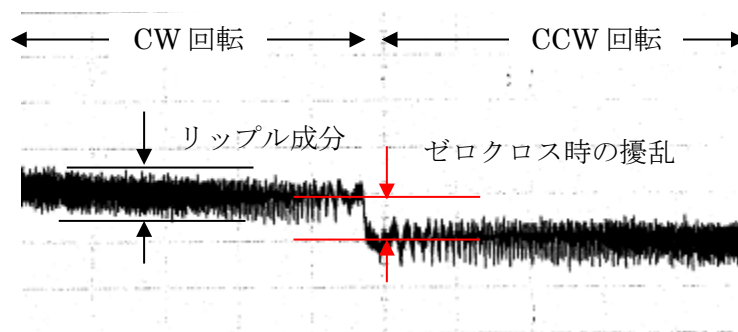


図 10.1.3.4-2 トルクリップルメータでの測定結果

10.1.4 留意事項

擾乱関連の測定実施前には、トルク変化に起因するオイルの状態を安定させるため、ならし回転を充分に実施した後に測定することを推奨する。

10.2 IRU（機械式ジャイロ）

10.2.1 機器概要

TDG（Tuned Dry Gyro）は、1個でジャイロロータスピン軸に直交な2軸の角速度を検出できる特性を持つジャイロであり、最低2つのTDGを用いることにより、衛星3軸についての角速度が検出できる。

TDGは、通常リバランス回路と組み合わせてリバランスループを構成し、この制御ループの追従作用により角速度を検出する。

図10.2.1-1にTDGの概念図を示す。

TDGは、ジャイロロータが機能的にフリーロータ（何ら拘束力がなく空間で回転している回転体という意味）となるよう設計されている。これを実現するため、ジャイロロータの支持としてフレクチャヒンジと呼ばれる特殊な機構部品を使用している。この部品は、機械的ばねと中間部材であるジンバルから構成されており、ある回転数（チューニング周波数）のもとでジャイロロータが回転している状態では、機械的ばね力を打ち消すばね力が生ずるという特性を持つ。

リバランス回路は、ピックオフで検出したジャイロロータの変位角がゼロになるよう、トルカに電流を流し、ジャイロロータの変位角を制御する。このときトルカに流れる電流は入力角速度に比例する。

トルカに流れる電流はリードアウト抵抗を通し、アナログレート信号（電圧値）として出力する。

また通常はこのアナログレート信号はV/Fコンバータ（電圧/周波数変換器）を通し、角度増分パルスとして出力される。

TDGを用いた慣性基準装置（IRU）は、TDG、リバランス回路、V/Fコンバータ、モータ駆動回路、電源等から構成される。構成例を図10.2.1-2に示す。

なお、1個で2軸の角速度検出が可能である特質を活かし、TDGを3個直交配置することにより、2 out of 3の冗長構成を組むことが多い。

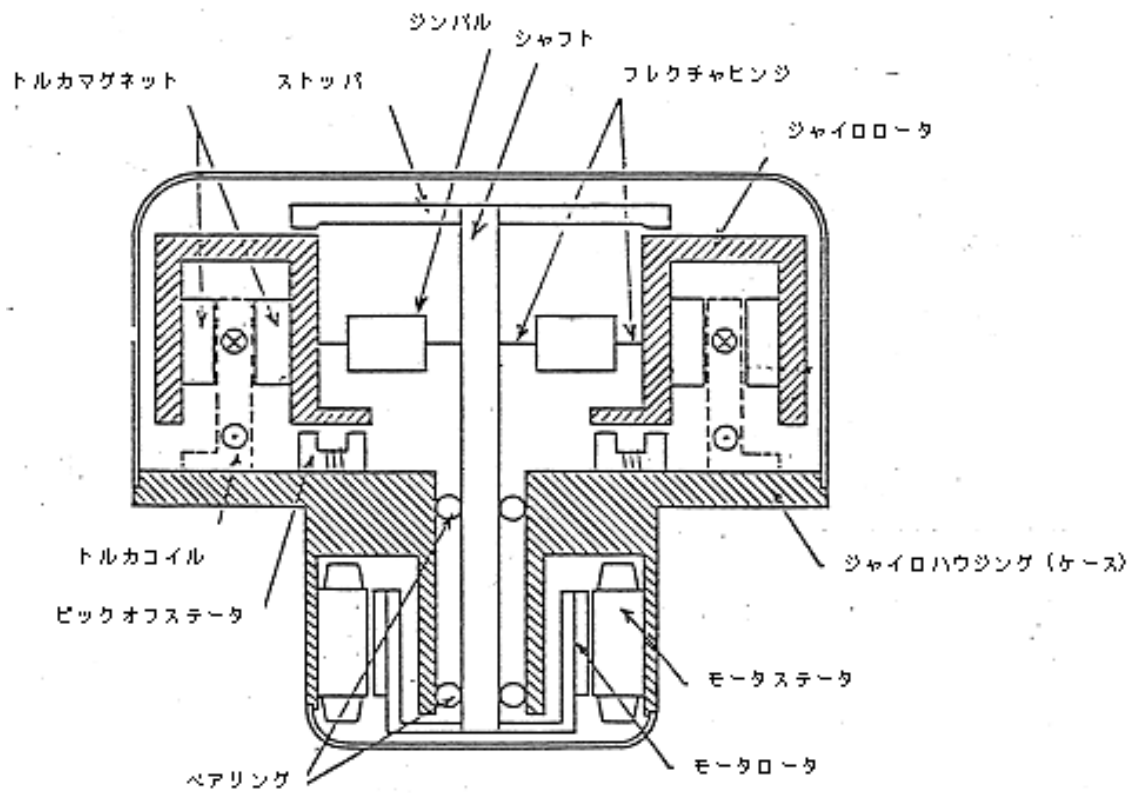


図 10.2.1-1 TDG の概念図 [10.5]

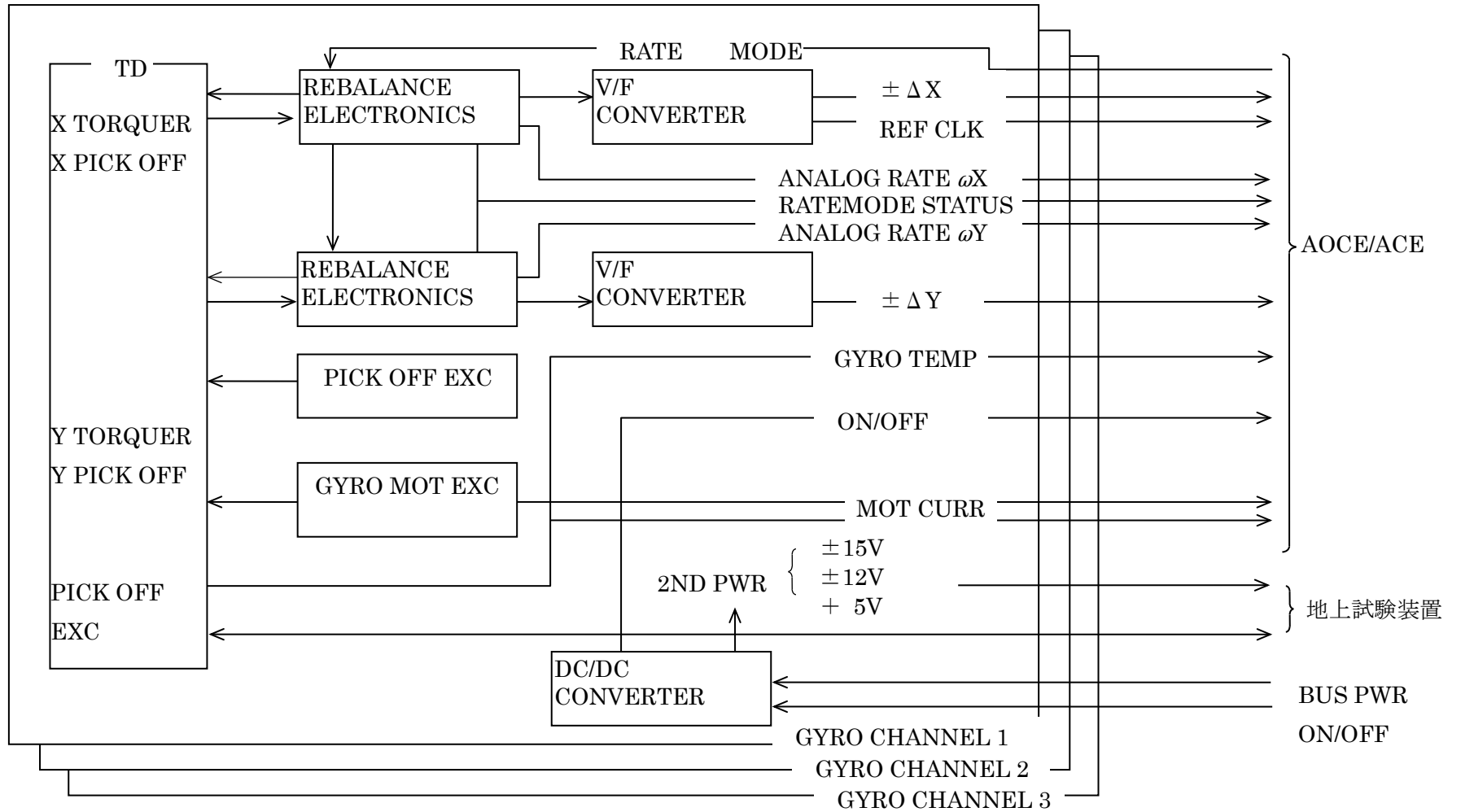


図 10.2.1-2 TDG を使った IRU の構成例

参考例として、IRU TYPE-ⅢA の外観及び主要性能を表 10.2.1-1 と図 10.2.1-3 にそれぞれ示す。

表 10.2.1-1 IRU TYPE-ⅢA の主要性能

外形寸法	257mm x 364mm x 108mm
質量	10.5 kg Max.
短期安定度	0.002 deg/h (1 σ) Max.
角度分解能	0.05 arcsec
NEA	2.0 arcsec p-p Max.
角速度計測範囲	+/-10 deg/s Min (符号保証) +/-4 deg/s Min (線形範囲)
消費電力 (3 gyro on)	36.0 W Max.
設計寿命	20.5 年



図 10.2.1-3 TYPE-ⅢA 外観

10.2.2 擾乱要求項目と擾乱管理作業

IRU に関する擾乱については、10.2.1 項に機器の構成を示したように内部に 1 個から 3 個程度のジャイロが組込まれているため、これが高速で定常回転する際に発生する回転に同期した周波数の擾乱が支配的なものとなる。通常ジャイロの回転数が高いため、この回転同期の周波数は 100 から 200Hz 程度の一定の周波数の擾乱となる。このような周波数領域では衛星の全体モードの振動は励起されず、IRU 搭載位置から振動擾乱が問題となるミッション機器等までの並進力やモーメントの伝達が問題となるが、周波数が比較的高いため構造による減衰が期待できること、また厳密な影響の推定には衛星構体等の部分的なモードを含む高次のモードまでの検討が必要なため、これまでは特に擾乱要求が設けられない場合も多かった。近年、高性能な観測衛星等で、このような比較的周波数の高い領域まで擾乱の抑制が必要となるケースがでてきており、この場合は擾乱の大きさを並進力およびモーメントで表現することになる。

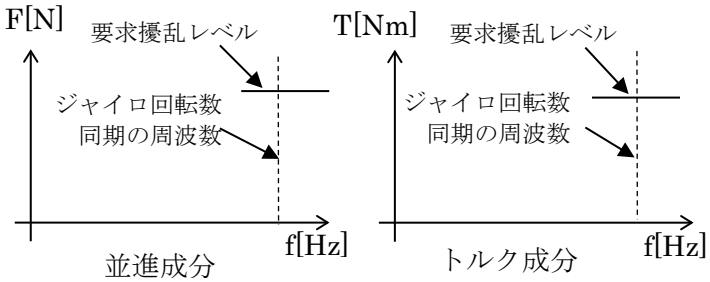
このようなケースにおける代表的な擾乱要求項目と、コンポーネント製造・試験において実施する擾乱管理作業について示す。

10.2.2.1 擾乱要求項目

IRU に要求される擾乱要求項目としては、以下に示す項目が挙げられる。

擾乱(擾乱の原因となるジャイロの回転数が一定なため、この回転に同期した成分で規定)要求の概略と、主要な発生要因と考えられる項目を表 10.2.2.1-1 にまとめる。

表 10.2.2.1-1 擾乱要求管理項目 概要

擾乱 要求 項目	要求の概要	主要な発生要因
擾乱	<p>ジャイロの回転数に同期した周波数付近で、並進成分(F_x、F_y、F_z) [N]及びトルク成分(M_x、M_y、M_z) [Nm]、により規定</p> <p>参考として、規定のイメージを以下に示す。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • ジャイロ部分のロータのスタティックインバランス/ダイナミックインバランスにより回転数に同期して発生する擾乱 • IRU 全体の擾乱については、複数ジャイロの擾乱のベクトル和（直交する3個のジャイロの構成では、各成分について1個の場合の最大2倍程度）を考慮する必要がある。 また、各ジャイロの回転数差に起因して、擾乱のベクトル和は時間的な変動を伴う場合があり、変動量の扱いに配慮する必要がある • IRU については、打ち上げ時の厳しい振動や衝撃等の機械環境条件からジャイロを保護するため、緩衝系を持つことがあり、この緩衝系のジャイロの回転数にあたる周波数での応答倍率を考慮する必要がある。

上記の要求項目に対する主要な要因について、発生メカニズム及び概略を次項に示す。

10.2.2.2 発生要因の概略

(1) ジャイロ部分のロータインバランスによる擾乱

(a) スタティックインバランス (SB: 静的不釣り合い)

ロータの回転中心から、不釣り合い質量半径 (r) と不釣り合いの質量 (m) の積で定義される。(図 10.2.2.1-1(a)参照)

$$U_s = mr \quad (10.2.2.2-1)$$

回転数を ω とすると、静的不釣り合いにより、回転数の2乗に比例する、回転軸に直交する面内の並進擾乱が発生する。

$$F_d = U_s \omega^2 \quad (10.2.2.2-2)$$

並進力による擾乱は機器の搭載位置によっては、取付けパネル等の衛星構体に関して回転擾乱としても作用する場合もある。

静的不釣り合いにより発生する擾乱周波数としては、

スタティックバランス (SB) → 並進擾乱周波数 = (回転周波数) × 1 倍
の周波数に現れる。

(b) ダイナミックインバランス (DB: 動的不釣り合い)

回転の中心から、不釣り合い質量半径 (r) と、不釣り合い質量間軸方向距離 (d) 及び不釣り合いの質量 (m) の積で定義される(図 10.2.2.2-1(b)参照)。

動的不釣り合いは回転中心と慣性主軸が一致していないことにより発生する。

$$U_d = mrd \quad (10.2.2.2-3)$$

回転数を ω とすると、動的不釣り合いにより、回転数の2乗に比例する、回転軸に直交する軸まわりの回転(トルク)擾乱が発生する。

$$T_d = U_d \omega^2 \quad (10.2.2.2-4)$$

動的不釣り合いにより発生する擾乱周波数としては、

ダイナミックバランス (DB) → トルク擾乱周波数 = (回転周波数) × 1 倍
の周波数に現れる。

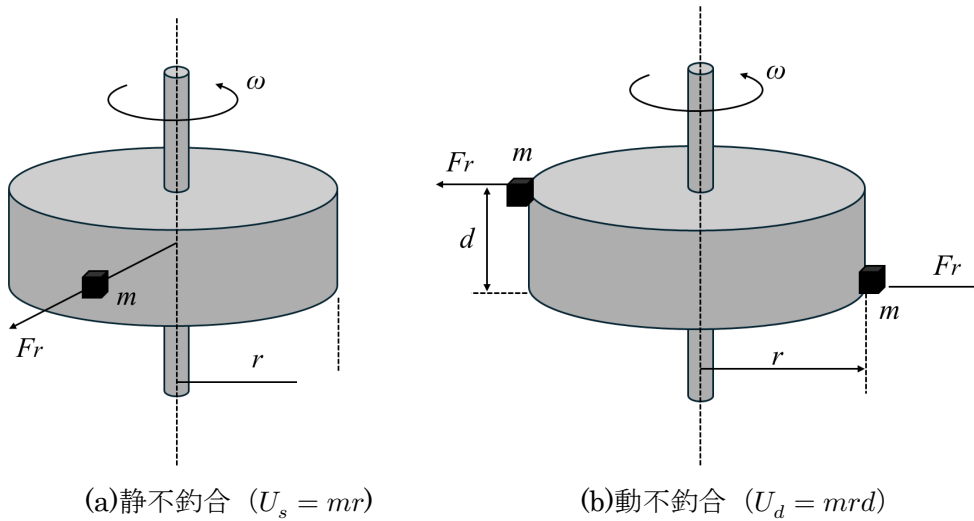


図 10.2.2.2-1 ジャイロのロータ不釣合量の定義

(2) ジャイロが搭載される緩衝系の共振が擾乱レベルに与える影響 (緩衝系数学モデル)

IRU におけるジャイロを搭載する緩衝系については、高いレベルの振動や高レベルの衝撃環境から、高精度なジャイロを保護する目的で使用される。前項で述べたジャイロ部分のロータインバランスによって発生する擾乱はこの緩衝系を経由して IRUハウジングに伝えられるためこの部分の応答特性を加味して擾乱の大きさを考える必要がある。緩衝系の応答特性を把握するため、緩衝系をバネ・マス・ダンパ系で考える。系の概要およびパラメータの定義を図 10.2.2.2-2 に示す。緩衝系の特性については、良好な振動絶縁性を持たせながら大きな衝撃荷重に対しても底付きをさせない、バネ特性を有する防振ゴムの特性にヒステリシスを持たせてより大きな減衰特性を持たせるなど製造会社ごとのノウハウによる非線形な特性となっていることが殆どであるが、この場合にはバネ定数や減衰係数については、振動特性の実測等で確認するのが現実的である。

バネ・マス・ダンパ系の伝達率 $T(\omega)$ は、

$$T(\omega) = \sqrt{\frac{1 + (\omega/\omega_n)^2}{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \tag{10.2.2.2-5}$$

で表される。各パラメータは以下で表され、系の固有振動数と共振周波数を測定すればバネ・マス・ダンパ特性値が算出できる。

(固有振動数) : $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow k = m\omega_n^2$ (10.2.2.2-6)

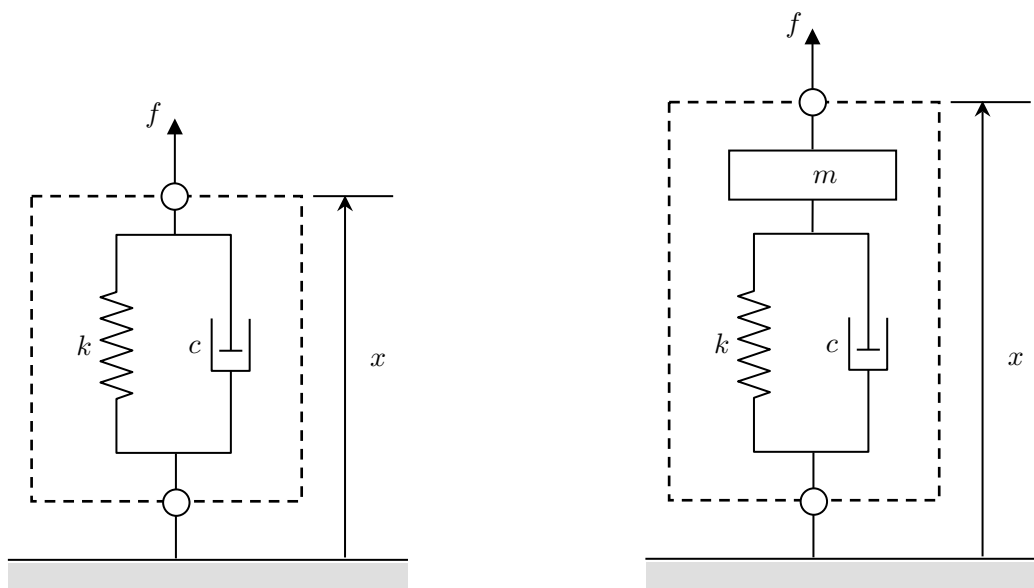
(共振周波数) : $\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \Leftrightarrow \zeta = \sqrt{\frac{1 - (\omega_p/\omega_n)^2}{2}}$ (10.2.2.2-7)

(減衰比) : $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \Leftrightarrow c = 2\zeta\sqrt{km}$ (10.2.2.2-8)

m : 慣性質量[kg] c : 減衰係数[kg/s] k : バネ定数[kg/s²]

なお、固有振動数は入力荷重とベース荷重の位相差が $-90[\text{deg}]$ となる周波数で、共振周波数は入力荷重とベース荷重のゲインが最大となる周波数で定義され、ダンピングの影響が無ければ（固有振動数）＝（共振周波数）となる。

緩衝系に用いられる防振ゴムでは、バネ特性や減衰特性がこの防振ゴムを使用する際の変位（変形量）に対して非線形な特性を有し、全体のバネ特性や減衰特性が温度によって変化することがある。この場合には緩衝系として高いレベルの振動環境を受ける場合などの比較的大きな変形量で見られるバネ特性や減衰特性と、ジャイロが発生する擾乱の伝達を考慮する場合などの微小な変形量でのバネ特性や減衰特性に差異が生じ、全体の特性が温度によって変化する場合があるので注意が必要である。防振ゴムを使用した緩衝系を設計する際には、大きな振動入力に対する共振周波数や共振倍率に着目して設計を行うが、擾乱を考慮するような微小振動レベルでは、防振ゴムの変形量の大きさによる非線形性のために、これより共振周波数が高くなり、共振倍率が大きくなることがある。



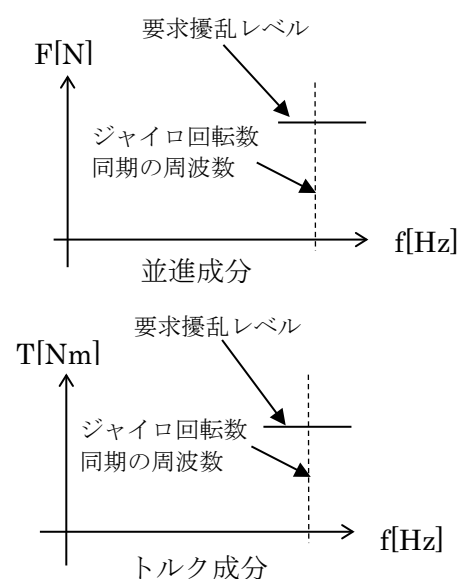
m : 慣性質量[kg] c : 減衰係数[kg/s] k : バネ定数[kg/s²] x : 変位[m]

図 10.2.2.2-2 系がバネ・ダンパ系の場合（内部慣性質量 無／有）

10.2.2.3 擾乱管理作業

10.2.2 項に挙げた擾乱要求項目に対し、項目別の製造・試験時における管理作業の概要を表 10.2.2.3-1 に示す。製造及び試験時に表に示す調整/評価を実施し、IRU の擾乱特性を管理している。測定方法等については、10.2.3 項に示す。

表 10.2.2.3-1 擾乱要求項目に対する管理作業

要求項目	製造時 管理作業	試験時 管理作業
<p>擾乱</p> <p>ジャイロの回転数に同期した周波数付近で、並進成分(F_x, F_y, F_z) [N]及びトルク成分(M_x, M_y, M_z) [Nm]、により規定</p> <p>参考として、規定のイメージを以下に示す。</p> 	<p>ジャイロ単体の製造時に、ジャイロロータインバランスを管理</p>	<ul style="list-style-type: none"> キスラーテーブルを使用した擾乱測定により評価(ジャイロの回転数に同期した周波数のピークレベルから推定) 緩衝系の応答特性については、これが含まれた形で計測される。 <p>測定条件等については以下に示す項に記載する。</p> <ul style="list-style-type: none"> キスラーテーブルを使用した擾乱測定：7.3.1 項 バランスマシンを使用したロータバランス値計測
<p>スタティックインバランス (SB) / ダイナミックインバランス (DB)</p> <p>製造時のロータインバランスに対する規定</p> <p>スタティックインバランスとダイナミックインバランスに規定を設定する。 SB : TBD[kgm]以下 DB : TBD[kgm²]以下</p> <p><u>緩衝器の振動特性 (参考)</u> 緩衝器としては、耐環境性能を満足する固有振動数、共振倍率が要求される。</p>	<p>バランスマシンを使用したロータバランス調整を実施</p> <p>耐環境性能の評価のため、緩衝系の購入時に振動試験を実施</p>	<ul style="list-style-type: none"> キスラーテーブルを使用した擾乱測定により評価(1N成分ピークレベルから推定) <p>測定条件等については以下に示す項に記載する。</p> <ul style="list-style-type: none"> キスラーテーブルを使用した擾乱測定：7.3.1 項 <p>緩衝系の応答特性については、擾乱測定時にこれが含まれた形で計測される。</p>

10.2.3 擾乱要求項目別の測定・評価方法

10.2.2 項に示した、擾乱要求項目に対する擾乱管理作業について、試験時の擾乱評価方法の概要を示す。

10.2.3.1 キスラーテーブルを使用した擾乱測定

(緩衝系を含めた IRU 全体の擾乱評価/ロータインバランスによるジャイロ単体の擾乱評価に適用)

(1) 試験条件

キスラーテーブルを使用した擾乱測定は X、Y、Z 軸に発生する並進成分(F_x 、 F_y 、 F_z 成分)と各軸周りに発生するトルク成分(M_x 、 M_y 、 M_z 成分)を評価する。測定時には取り付け用の治具を介して IRU またはジャイロ単体をキスラーテーブルに設置し、100Hz から 200Hz となるジャイロの回転数に同期した周波数が含まれる周波数範囲にて擾乱を測定する。(図 10.2.3.1-1 参照)

データは 100Hz から 200Hz となるジャイロの回転数に同期した周波数が測定可能な条件で行えば良く、例えば以下に示す条件にて取り込み、FFT 処理後の波形に対して評価を行う。

測定条件：	IRU の定常動作時（ジャイロモータ定回転時）に測定
評価周波数帯域：	100Hz から 200Hz より十分に広い周波数帯域で測定
サンプリング周波数：	8kHz
アナログフィルター (LPF)：	3kHz
測定時間：	約 8sec

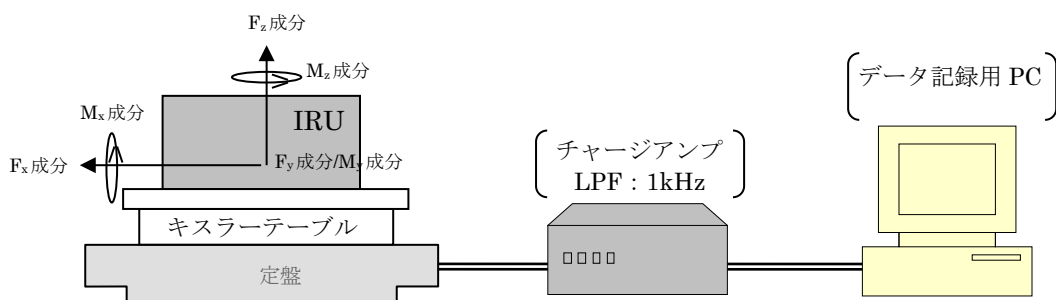


図 10.2.3.1-1 擾乱測定コンフィギュレーション

(2) 評価結果例

IRU 擾乱データの例として、SOLAR-B「ひので」の IRU (Type-V、TDG 1 個実装型) の擾乱測定データを図 10.2.3.1-2 に示す。図中における黒線は、IRU の擾乱データを示し、赤線はバックグラウンドの擾乱データを示す。計測データには緩衝系の応答特性も含まれるが、ジャイロの回転数に同期する周波数（この場合は約 155Hz）の成分が卓越していることがわかる。Y 軸がジャイロの回転軸方向である。

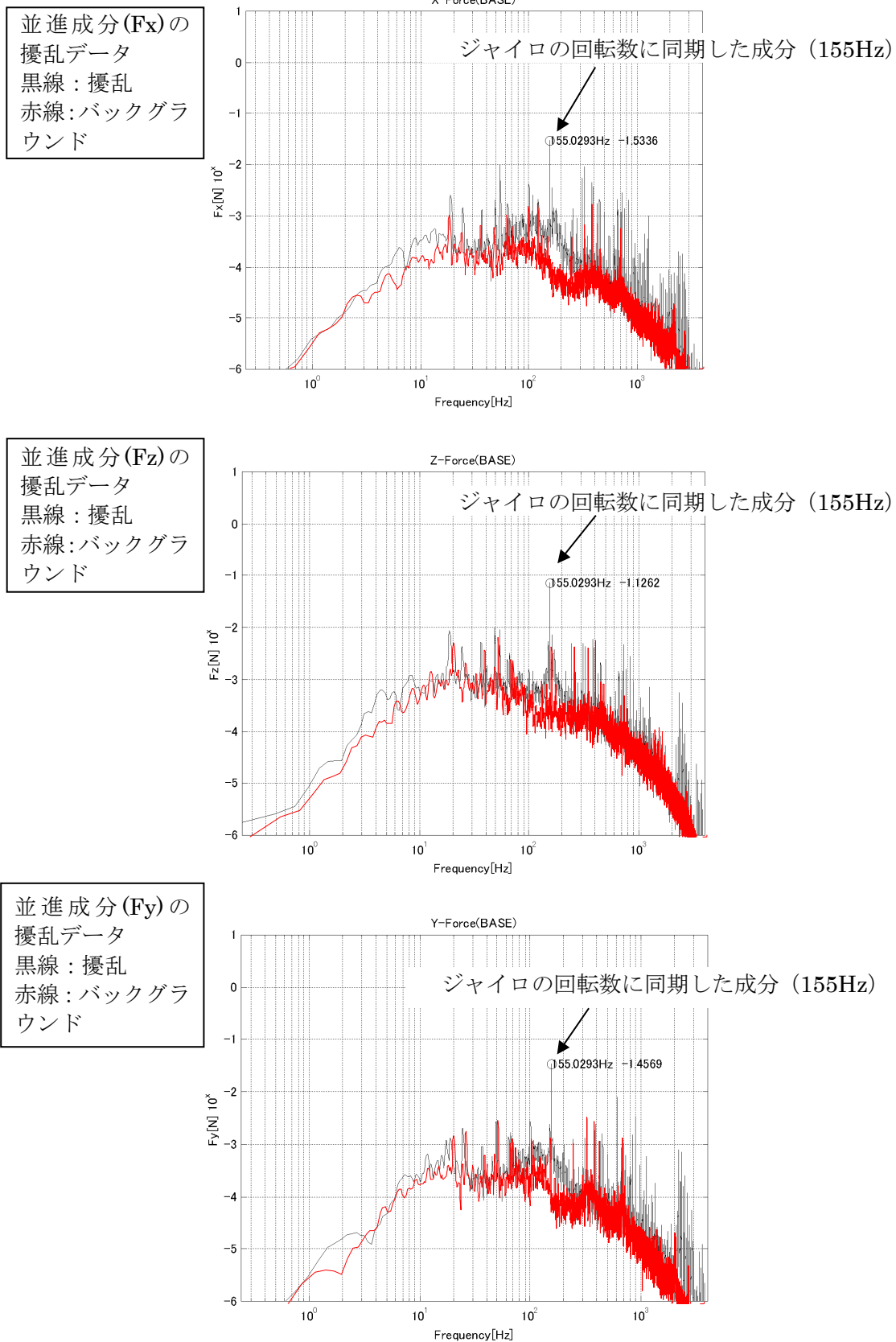


図 10.2.3.1-2 (1/2) IRU TYPE-V 擾乱測定結果 (並進成分)

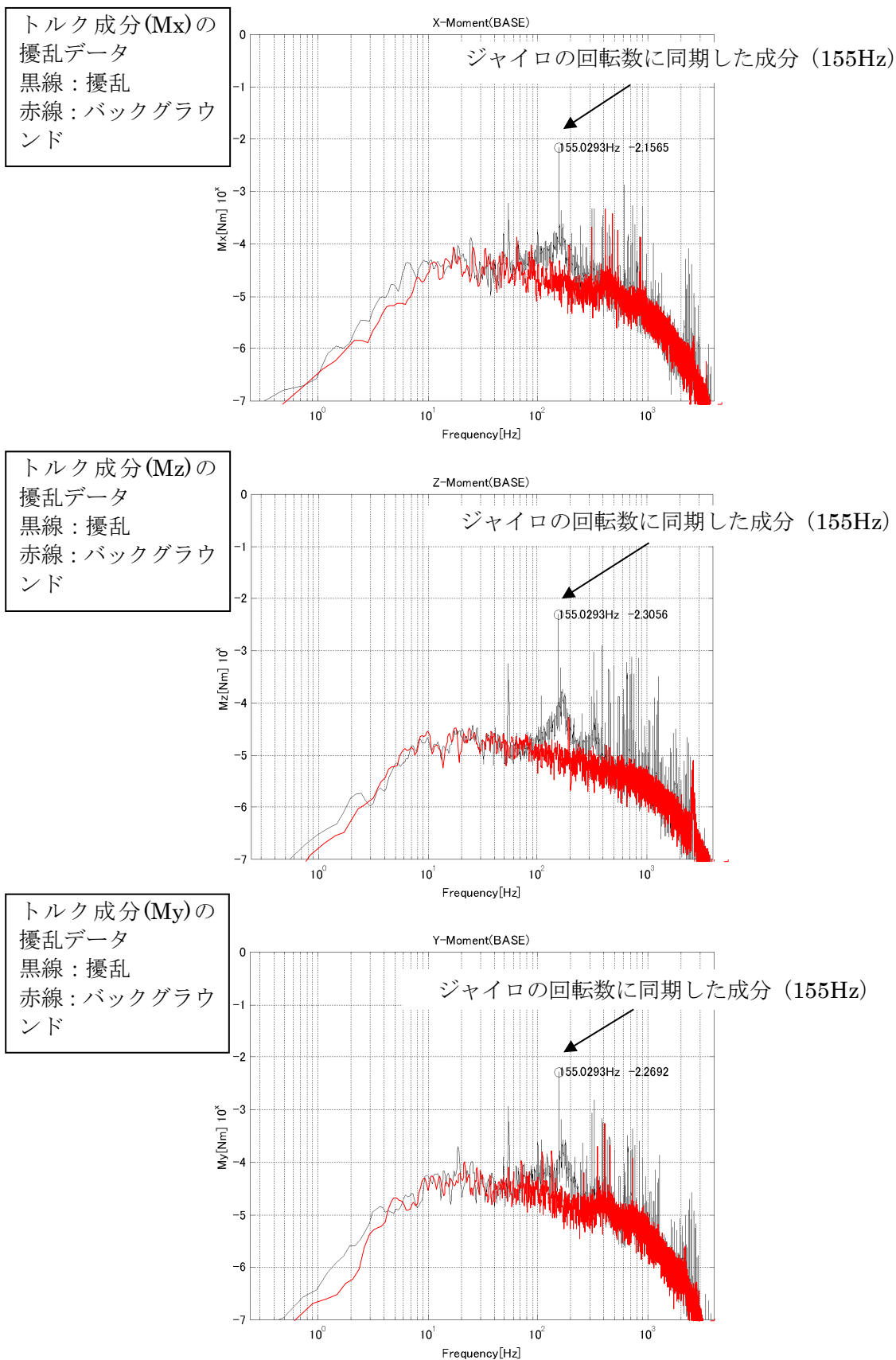


図 10.2.3.1-2 (2/2) IRU TYPE-V 擾乱測定結果 (トルク成分)

10.2.4 留意事項

IRU 等超精密ベアリングが組込まれた機器の擾乱性能は、振動/衝撃等の機械環境により大きく影響を受けるので、印加環境レベルについては、可能な限り低い振動条件に設定することが良い。

10.3 冷凍機（機械式）

10.3.1 機器概要

光や電磁波などの微弱信号を高感度に観測する場合、検出器及び検出回路自身が出すノイズを押えるために、また、望遠鏡自身の熱放射を低減するために、それらを冷却する必要がある。

冷凍機は、直接検出器等を冷却するため、検出器等を冷却する寒剤の予冷のため、または極低温部への入熱を抑制する放射冷却シールドの冷却のために使用される。

冷凍機は温度レベルや冷却サイクルによっていくつかのタイプがあるが、ここでは現在開発を進めている「第2世代2段スターリング冷凍機」（以下、単に冷凍機と言う）において実施した擾乱測定・評価の例を紹介する。

10.3.1.1 冷凍機の基本機能及び性能

冷凍機は圧縮機、膨張機およびそれらを接続するキャピラリチューブで構成される。圧縮機側で圧縮されたヘリウムガスが、キャピラリチューブを通じて膨張機側で断熱膨張することで、寒冷が得られるしくみになっている。

冷凍機の外観を図 10.3.1.1-1 に、主な諸元を表 10.3.1.1-1 にそれぞれ示す。

表 10.3.1.1-1 冷凍機の主要諸元 [10.7]

冷却能力	0.2 W at 20 K / 1W at 100K
消費電力	90 W 以下
質量	9.5 kg
大きさ	圧縮機 $\phi 108 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ 膨張機 $\phi 97 \text{ mm} \times 340 \text{ mm}$

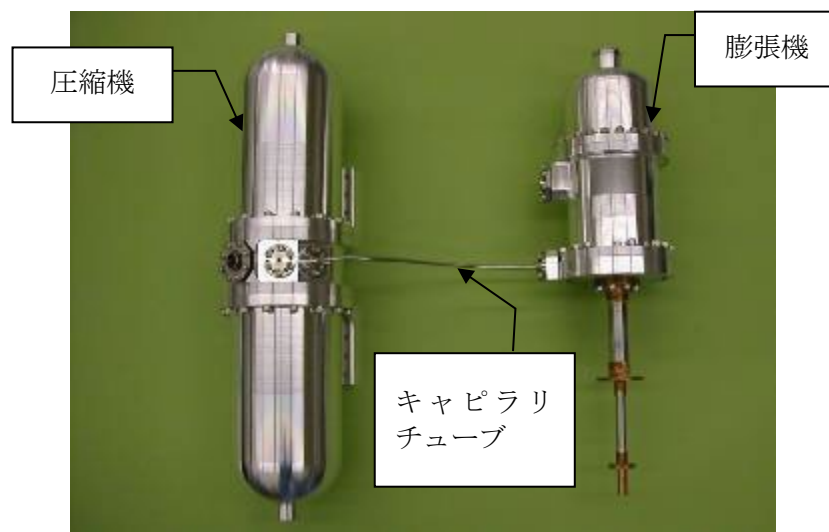


図 10.3.1.1-1 冷凍機の外観 [10.6]

10.3.1.2 冷凍機の擾乱源

冷凍機の内部構造図を図 10.3.1.2-1 に示す。圧縮機と膨張機的主要な擾乱源について、以下に説明する。

圧縮機は、ヘリウムガスの圧縮のため往復運動するピストンを有する。ピストンは、リニアモータに正弦波の電圧を印加し、駆動している。ピストンおよびその駆動機構は2セットあり、それらは互いに逆方向に動き、振動を打ち消すしくみになっているが、そこでキャンセルされない誤差が擾乱を発生する。

膨張機は、シリンダ内部にディスプレイサを有し、ヘリウムガスの圧力振幅とリニアモータによって往復運動する。ディスプレイサの振動を打ち消すためにディスプレイサと逆方向に運動するアクティブバランスを内蔵しているが、キャンセルされない誤差が擾乱となる。

冷凍機の擾乱力学モデルを図 10.3.1.2-2 に示す。

ほかに、圧縮機では可動部の支持機構であるリニアボールベアリングのノイズも高周波の擾乱の原因となり、キャピラリチューブを通じて圧縮機と膨張機を往復するヘリウムガスの圧力の脈動も擾乱を発生させる。

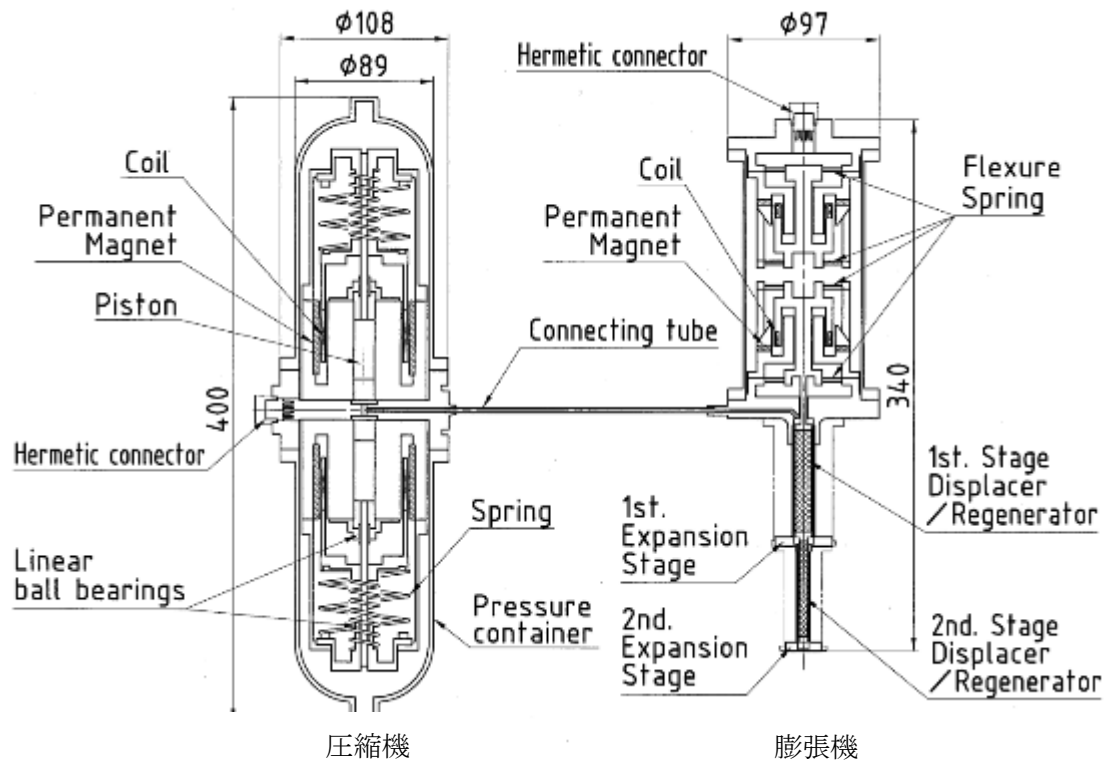
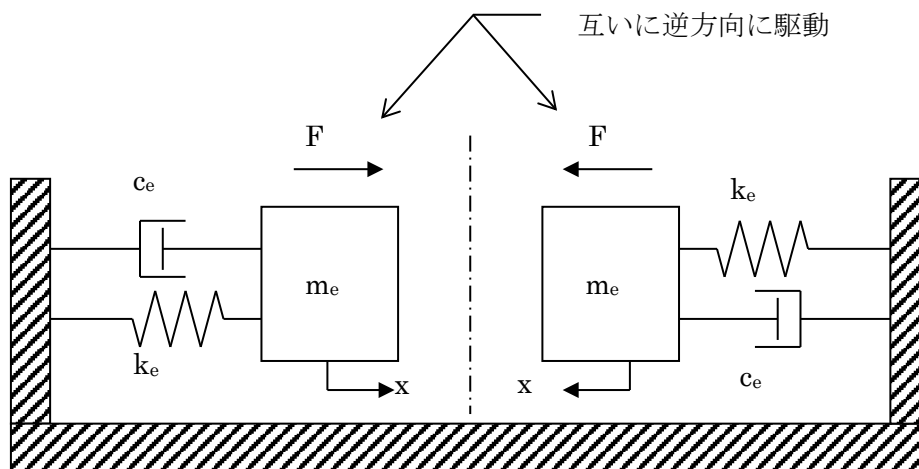


図 10.3.1.2-1 冷凍機の内部構造図 [10.7]



$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = F \sin \omega t$$

- m_e : 等価質量 (ピストン、ディスプレイサ等の可動部質量およびばね質量)
 c_e : 等価粘性減衰係数 (主としてガスの圧縮仕事により減衰)
 k_e : 等価ばね定数 (コイルばね、板ばね等の機械的ばねおよびガスばね)
 F : コイルに通電して生じる電磁力
 x : 変位

互いに逆方向に動く左右のピストン (またはディスプレイサ) 駆動機構における、可動部質量、減衰係数、ばね定数の非対称、及び駆動力の不釣り合いが、主な擾乱源となる。

図 10.3.1.2-2 冷凍機の擾乱力学モデル

10.3.2 擾乱要求項目と擾乱管理作業

冷凍機は、一定周波数の正弦波振動で運転されるため、擾乱は、その運転周波数の倍調波においてピークをもつ定常周期擾乱（線スペクトル）となる。そのため通常は、周波数に応じた加振力の制限が擾乱要求となる。冷凍機は概略、ピストンおよびディスプレイサが往復運動する駆動軸の振動が大きいいため、冷凍機に対する許容値も駆動軸方向と駆動軸直角方向に分けられる。

また、この擾乱要求項目に対する管理として、製造工程において以下の作業を実施している。

- ・対向往復運動する駆動部質量の合わせこみ
- ・ピストン・シリンダ間、ディスプレイサシリンダ間のクリアランス（アライメント）調整
- ・実際の加振力測定

10.3.3 擾乱要求項目の測定・評価方法

本項では、冷凍機の擾乱測定・評価方法について説明する。

10.3.2 項に示すとおり、冷凍機に対する擾乱要求は周波数に応じた加振力であるから、基本的にフォースセンサを用いて冷凍機取付点における反力の測定を行う。

冷凍機の擾乱測定の様子を図 10.3.3-1 に示す。

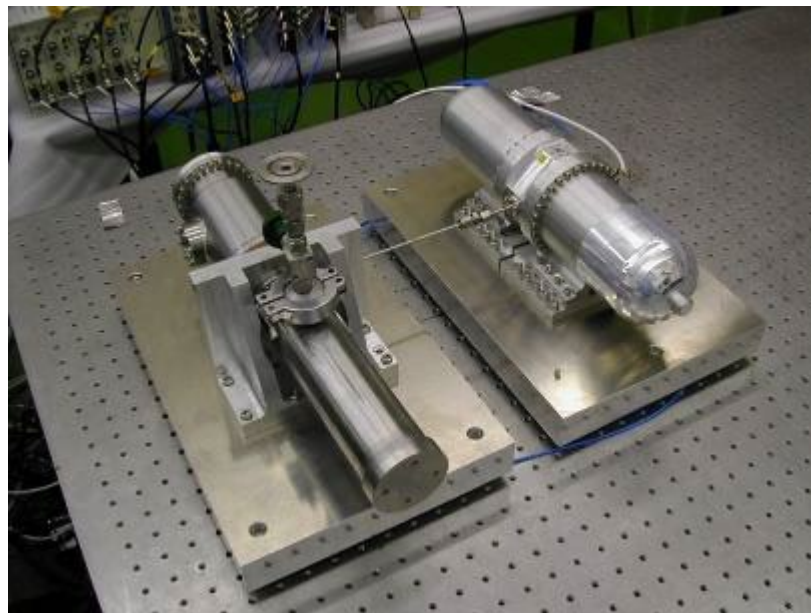


図 10.3.3-1 冷凍機の擾乱測定の様子

10.3.3.1 測定コンフィギュレーション

測定コンフィギュレーションを図 10.3.3.1-1 に示す。

圧縮機及び膨張機は、それぞれについて擾乱を測定する目的で、別々のインタフェースプレート(治具)に取付ける。インタフェースプレートはそれ自身の共振を避けるために、極力剛性の高い形状・寸法としている(プレート単体で固有振動数が 1kHz 以上)。

測定系の妥当性を評価するため、冷凍機擾乱を測定する前に、慣性加振器を基準擾乱源として用いたキャリブレーションを実施している。

冷凍機を載せたインタフェースプレートは、それぞれ 3 個ずつの圧電素子型フォースセンサを介して除振台に設置される。

本事例では 3 成分フォースセンサ(フォースリンク)を用いて同時に直交 3 軸を測定したが、単軸型を用いることもある。その場合は、インタフェースプレートを測定軸にあわせて直角に立てる治具が必要である。3 成分フォースセンサを用いた場合は、各センサの各軸方向の擾乱成分を測定しているため、実際の冷凍機取付点とフォースセンサとの位置関係を考慮すれば、冷凍機取付点でのモーメント 3 成分の算出も可能である。

除振台はテーブルを空気圧で浮かせる構造であり、外部から伝わる振動を除去している。

膨張機先端のシリンダ部には、極低温に冷却するために真空用容器を被せている。容器内はあらかじめ真空ポンプにて排気しておき、真空状態で封じ切っている。

測定系統図を図 10.3.3.1-2 に示す。

10.3.3.2 測定条件

冷凍機は、駆動電力の大きさに応じてピストンのストロークが変わる。そのため、実使用時に発生する擾乱の最大値を得るためには、定格最大電力を印加して測定を行う。

膨張機のディスプレイサのストロークは内部のヘリウムガスの温度によっても変化する。運転を開始し、冷却の初期の過程ではまだ温度が高いため、ヘリウムガスの圧力が大きくディスプレイサのストロークが大きい。この状態ではディスプレイサが過度に移動し、端部に衝突する恐れがあるため、大きな駆動電力を掛けることはできない。したがって、定格最大電力を印加した擾乱測定は、所定の温度まで冷却された定常運転状態で行わなくてはならない。

10.3.3.3 測定データの処理及び評価結果の例

フォースセンサで測定された力のデータは、そのまま時系列データとしてデータレコーダに記録する。データは 3 箇のフォースセンサで測定したものであるから、トータルの力としては、時系列データの段階で加算したものを FFT で周波数分析を行う。求めたパワースペクトル密度[N²/Hz]と周波数の幅[Hz]から、最終的には rms 値[Nrms]で表現している。

冷凍機の擾乱測定結果の例を図 10.3.3.3-1 と図 10.3.3.3-2 にそれぞれ示す。

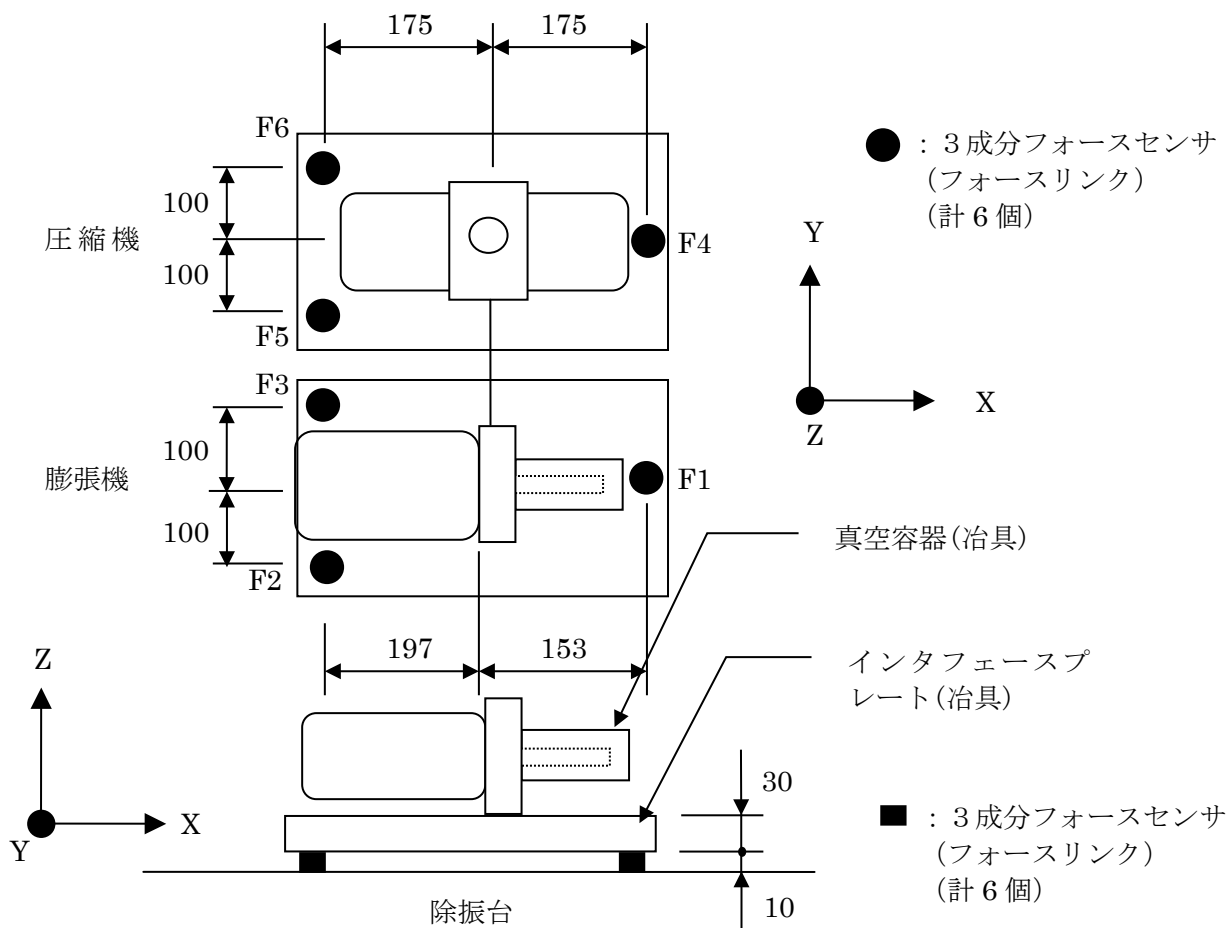


図 10.3.3.1-1 擾乱測定試験コンフィギュレーションの例

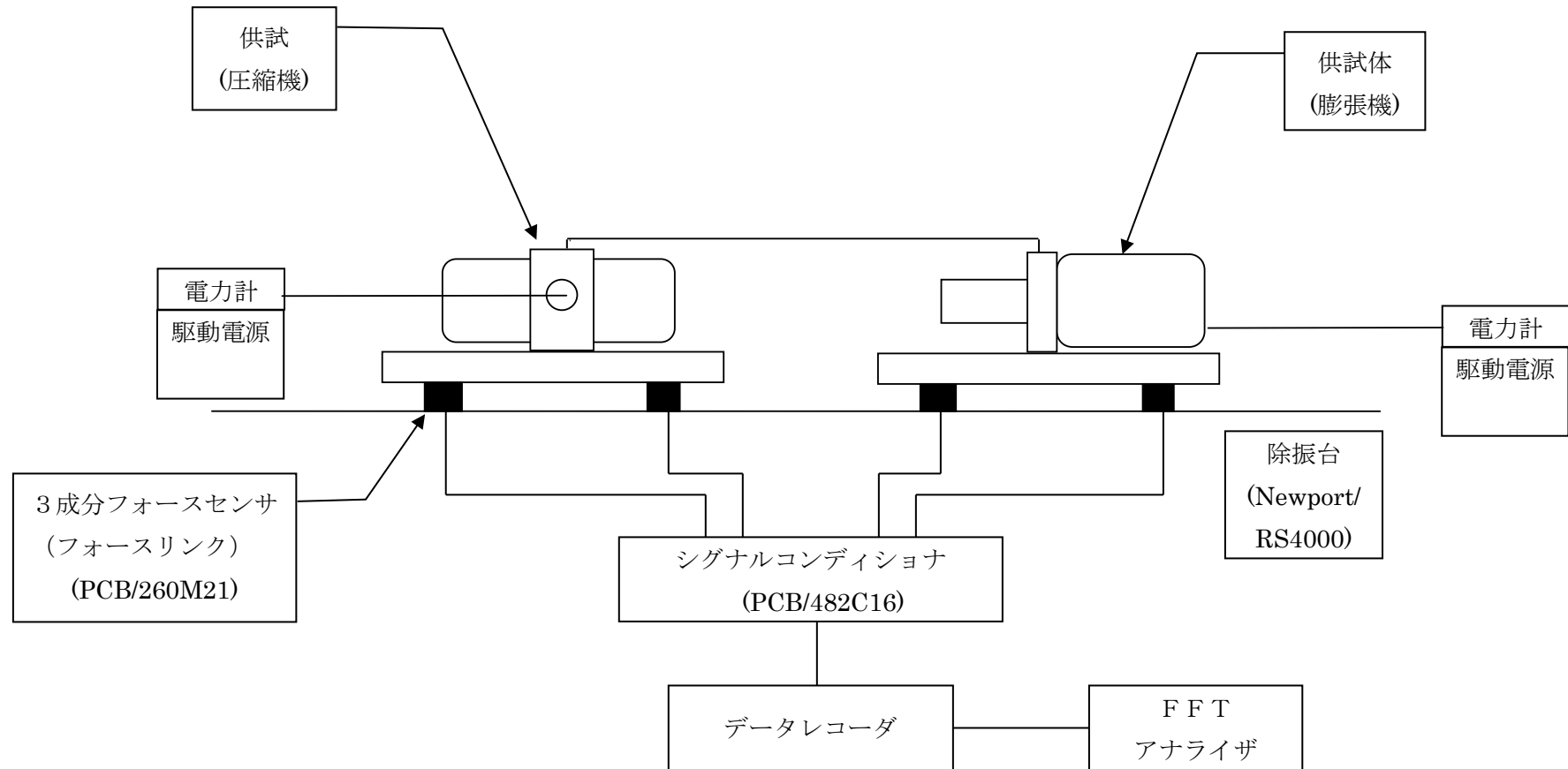


図 10.3.3.1-2 測定系統図

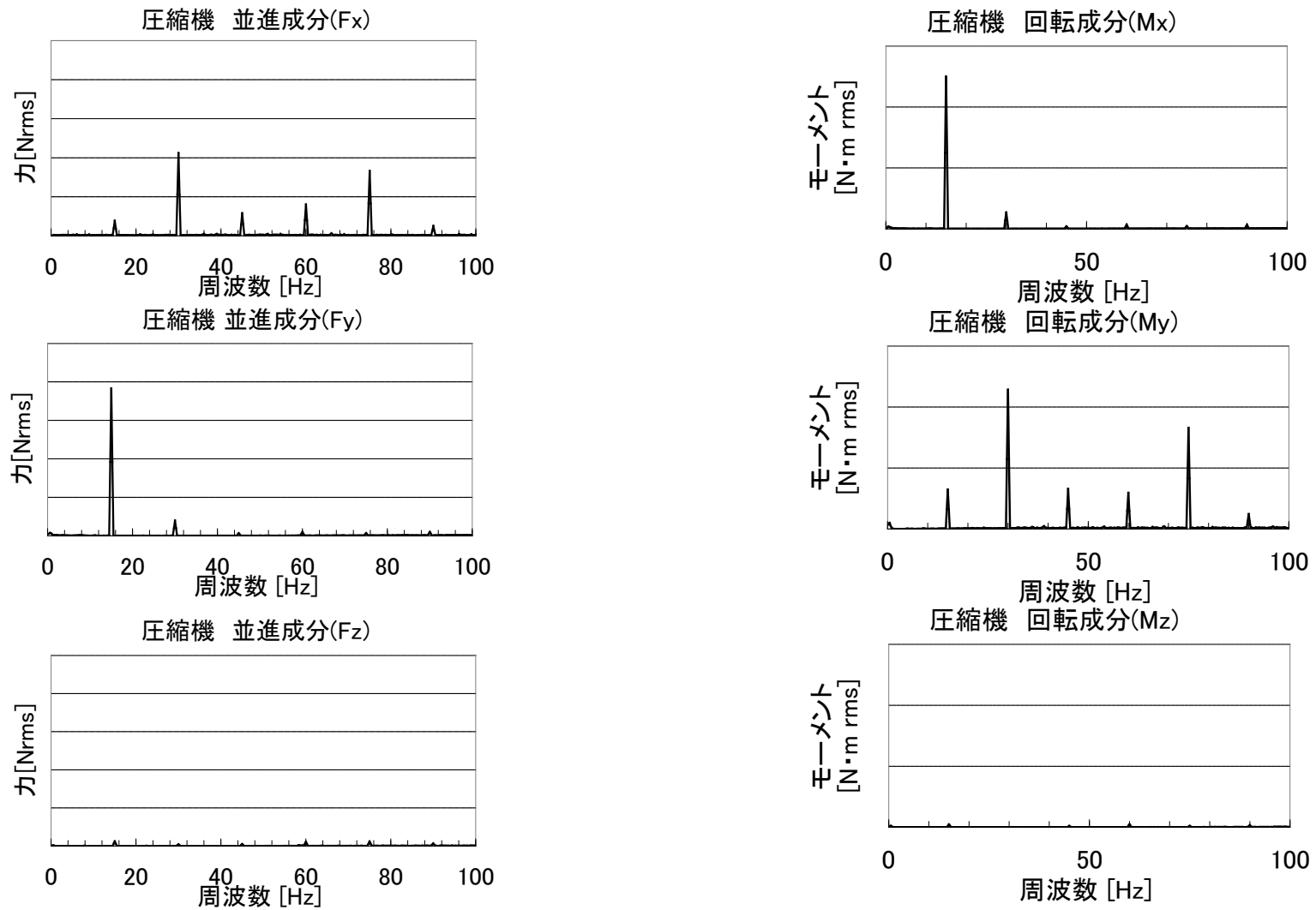


図 10.3.3.3-1 冷凍機の擾乱測定結果の例（圧縮機）（並進と回転の各 3 個のグラフの縦軸フルスケールは同一となるように描画）

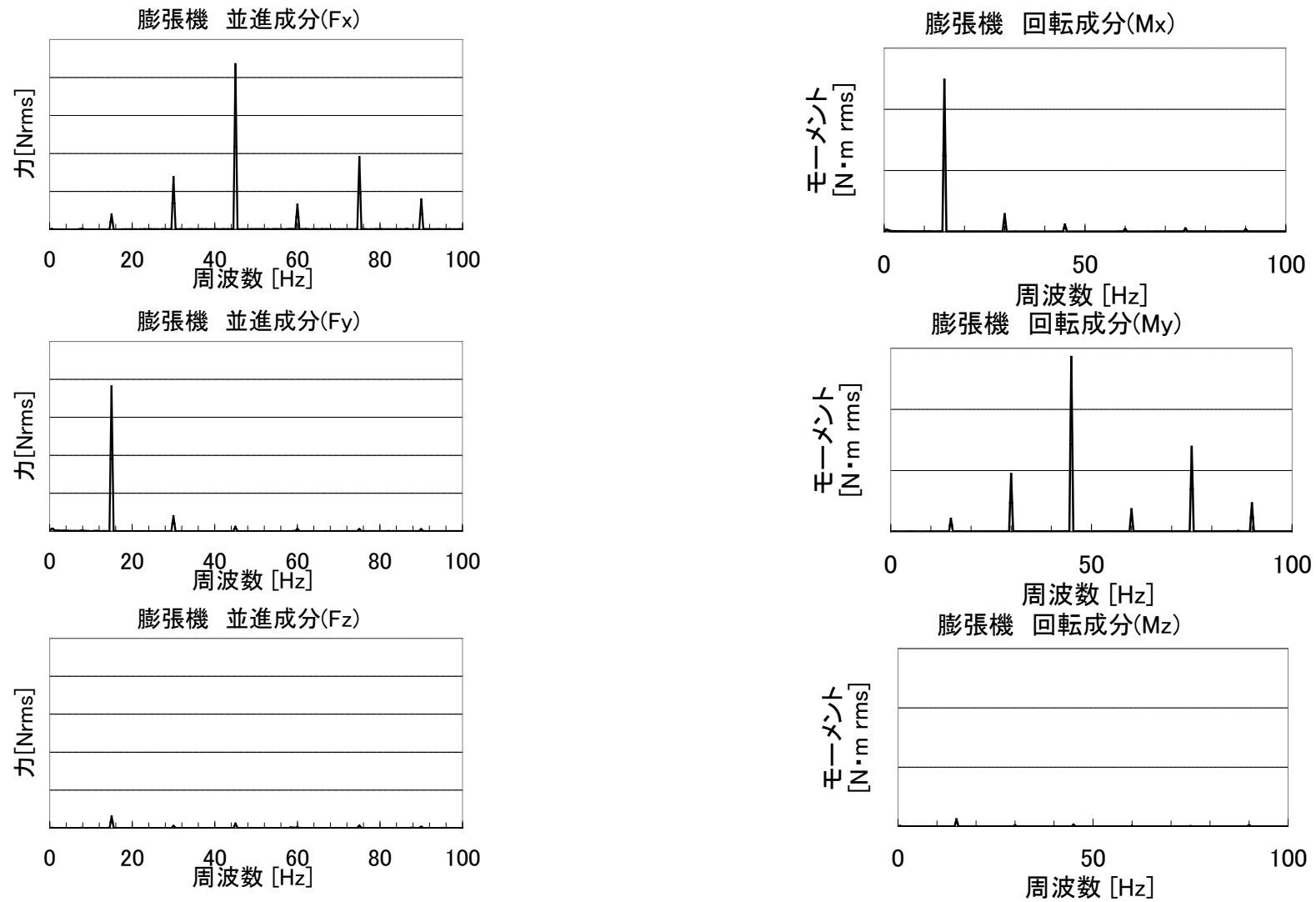


図 10.3.3.3-2 冷凍機の擾乱測定結果の例（膨張機）（並進と回転の各 3 個のグラフの縦軸フルスケールは同一となるように描画）

10.3.4 留意事項

必要に応じて、圧縮機と膨張機の相対的な位置関係も考慮する必要がある。

圧縮機と膨張機はキャピラリチューブで接続されているため、互いの振動の影響が無いわけではない。本事例の図や写真で示したコンフィギュレーションは圧縮機と膨張機が平行に並んでいる場合であるが、実際の衛星への搭載時は、配置の制限などにより、圧縮機と膨張機の駆動軸方向が互いに直交したり、斜めであったりと位置関係が複雑な場合がある（図 10.3.4-1 参照）。より高い精度が求められるときは、実際に搭載される際の位置関係で測定を行わなければならない。

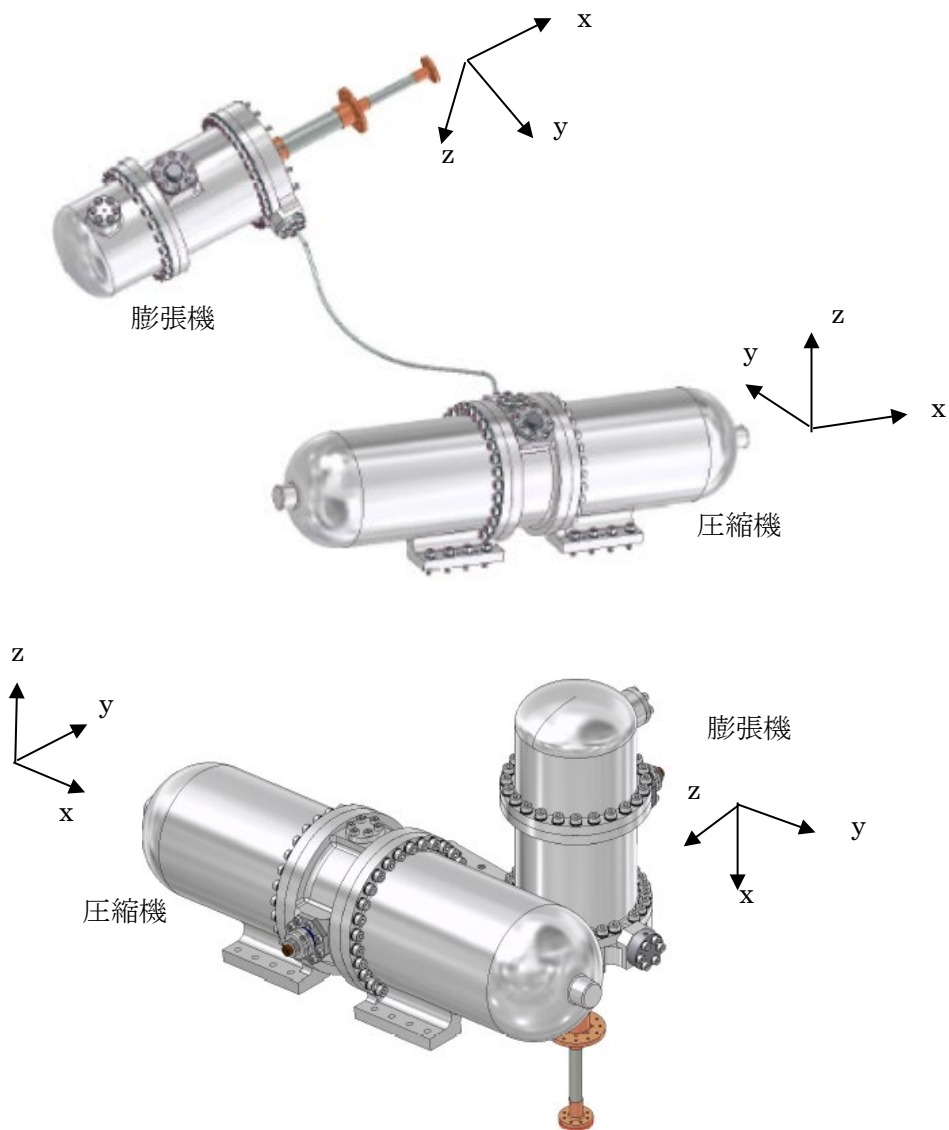


図 10.3.4-1 圧縮機と膨張機の配置の例

10.4 パドル駆動機構

10.4.1 機器概要

10.4.1.1 パドル駆動機構の基本機能及び性能

パドル駆動機構 (PDM) は、太陽電池パドル系を構成するコンポーネントであり、以下の機能を有する。

- ・太陽電池パドルを機械的に支持し、姿勢制御系からの駆動信号により回転駆動する。
- ・太陽電池パドルからの電力・信号を衛星内部に伝達する。
- ・衛星本体に対する太陽電池パドル回転位置を検知し、姿勢制御系に伝達する。

上記機能を実現するため、図 10.4.1.1-1 に示すようにステップモータ、減速機（波動歯車装置、平歯車）、シャフト、ベアリングの回転駆動機構要素、スリップリング及び角度検出器（ポテンショメータ等）より構成される。例として技術試験衛星「きく 6 号」（ETS-VI）に搭載された PDM の外観を図 10.4.1.1-2 に示す。

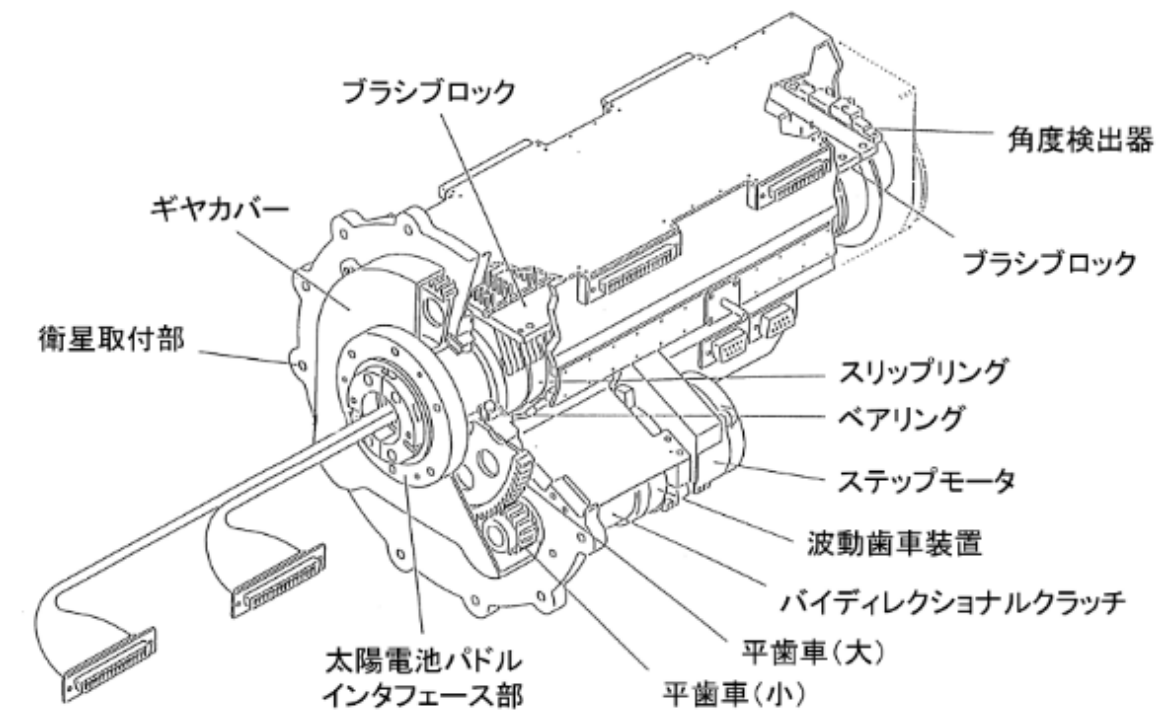


図 10.4.1.1-1 パドル駆動機構の構成図 [10.8]

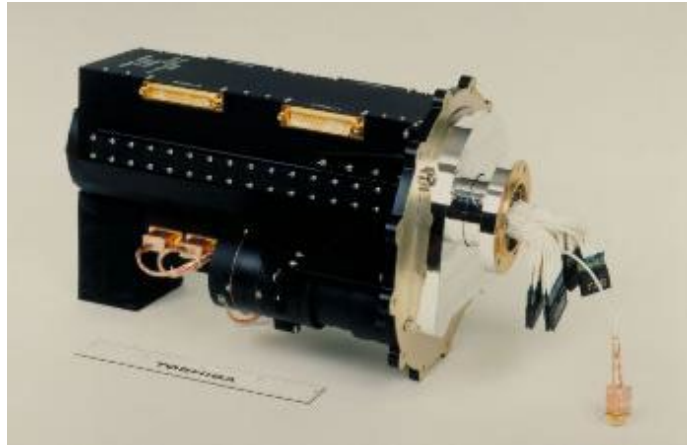


図 10.4.1.1-2 パドル駆動機構の外観 [10.9]

10.4.1.2 パドル駆動機構の擾乱源

パドル駆動機構では、ステップモータへのパルス列駆動信号印加によるモータロータへの電磁トルク及び電磁トルクによるモータロータのステップ的回転運動を擾乱要因とする。この発生トルクが太陽電池パドルを含むトルク伝達経路の慣性／剛性／減衰特性及び平歯車すきま等の非線形要素を介して、衛星構体に擾乱力・トルクとして伝達する（図 10.4.1.2-1 を参照）。

従来は、回転駆動軸周りの擾乱トルクが支配的であり、他の成分は無視して良いと考えられてきたが、最近の計測事例から、回転駆動軸に直行する並進力成分も比較的大きいことが判明している。

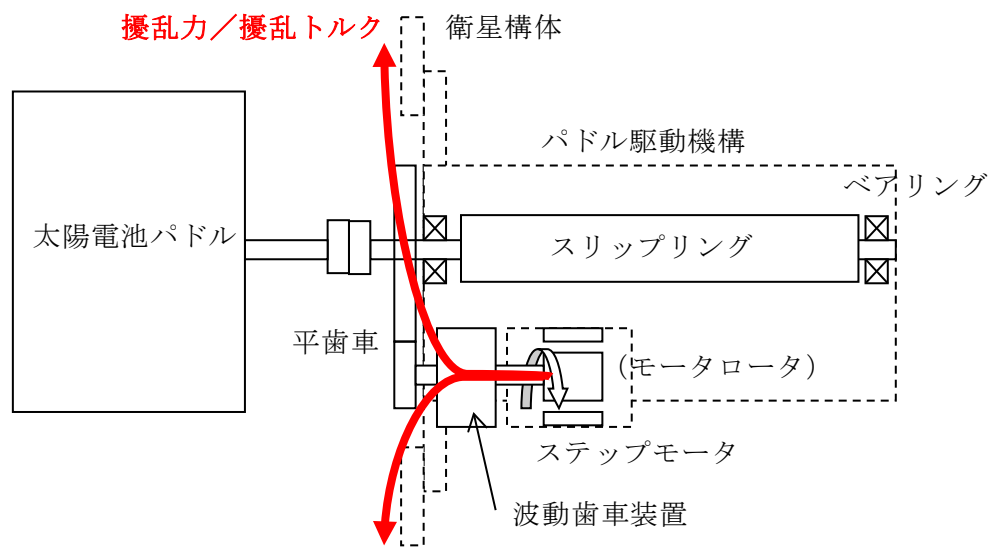


図 10.4.1.2-1 パドル駆動機構の擾乱伝達模式図

10.4.2 擾乱要求項目と擾乱管理作業

パドル駆動機構については、国内について知る限り、擾乱要求を課された例は無く、擾乱計測の事例も少ない。但し、パドル駆動機構は他事例と並んで主要な擾乱源の一つであり、今後、衛星の擾乱管理要求に応じて、擾乱要求項目や擾乱管理作業を設定する必要はあると考えられる。

製造工程及び受入試験における擾乱要求項目、擾乱管理作業の例として以下が挙げられる。擾乱出力への影響度や個々の製品バラツキを踏まえて設定すべきと考えられる。

○擾乱要求項目（例）

- ・ インタフェース面における 6 軸の擾乱力／トルク
- ・ 擾乱振動の内部共振に係る構造パラメータ（固有振動数と共振倍率など）

○擾乱管理作業（例）

- ・ ステップモータ トルク特性（応答特性、保持トルクなど）
- ・ 駆動回転軸周りのねじり剛性、イナーシャ量

10.4.3 擾乱要求項目の測定・評価方法

本項では、6 軸動力計を用いた擾乱測定を事例に、測定・評価方法を記述する。

10.4.3.1 測定コンフィギュレーション

図 10.4.3.1-1 に擾乱測定コンフィギュレーションを示す。

本測定では、パドル駆動機構と衛星構体との分界面をパドル駆動機構の衛星構体への取り付け面（図 10.4.3.1-1 参照）に置き、取り付け面に作用する擾乱力、擾乱トルクを計測する。

擾乱力・トルクの計測装置には、7.2.1.1 項に紹介した 3 成分フォースセンサ（圧電素子タイプ、スイス Kistler 社製フォースリンク型番 9317C の旧型機 9317B）を用いた 6 軸動力計を使用した。6 軸動力計は 6 個の電荷型のフォースセンサより構成しており、各フォースセンサから出力された 3 方向成分フォースに対応する電荷をチャージアンプにより電圧信号に変換した上でデータロガーに記録する。パドル駆動機構が発生する 6 軸の擾乱力・トルクは、記録したセンサ出力信号をオフラインにてセンサ配置及びパドル駆動機構の取り付け位置に応じて合成し算出する。本測定では、パドル駆動機構の出力軸回転軸中心線とセンサ計測面の交点を座標系の原点とした（図 10.4.3.1-1 参照）。

なお、3 成分フォースセンサからの出力信号の取得と合わせて、回転角での依存性を確認することを目的に、試験装置及びパドル駆動機構からの回転角信号（ポテンシオメータ出力）を参考取得している。

また、付録-Ⅲの説明にあるように、取り付け治具等の伝達特性が測定値に影響を与える場合がある。

本測定では、付録-Ⅲで説明する手法に従い、測定値から取り付け治具影響を補正した。

図 10.4.3.1-1 のコンフィギュレーションにて、パドル駆動機構の取り付け点（治具へのネジ固定位置）にキューブ上に配置した動電型加振器により、加振力（基準入力）を与え、その際のセンサ出力を取得することにより、基準入力とセンサ出力の比（取り付け面基準）を取得した。

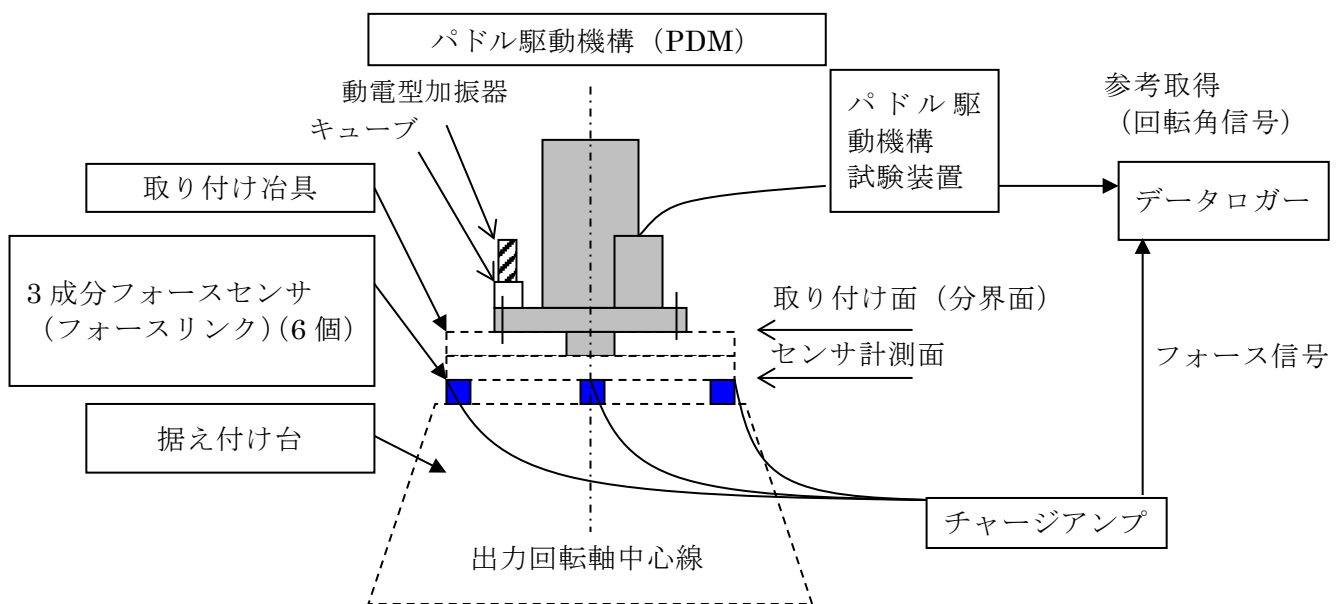


図 10.4.3.1-1 パドル駆動機構 (PDM) の擾乱測定コンフィギュレーションの例

10.4.3.2 測定条件

以下の表 10.4.3.2-1 のデータ取得条件で表 10.4.3.2-2 の測定ケースについて測定を実施した。

測定ケースは、PDM の軌道上での駆動モード（スルーモード、クロックモード、ホールモード）に合わせて、回転速度及びパルス幅（各単一パルスの印加時間）を設定した。これら計測の前後にバックグラウンドノイズ計測を入れた。

また、回転角依存の有無を確認するため、360度全角の擾乱をスルーモードで計測する試験ケースも入れた。なお、結果としては、回転角の依存性は少なく、どの回転角でも擾乱の振幅は同レベルであった。

表 10.4.3.2-1 データ取得条件

項目	条件	備考
サンプリング周波数	3kHz	
測定時間	180sec	測定ケース 360deg ケースでは 32min.

表 10.4.3.2-2 測定ケース

#	ケース名称	パルス幅 (単一パルスの印加時間)	回転速度 [deg/min.]	備考
1	360deg スルー (CW 方向)	15.6ms	11.25 (3pulse/46.8ms)	回転角依存性有無の確認
2	360deg スルー (CCW 方向)	15.6ms	11.25	
3	バックグラウンドノイズ	—	—	
4	スルー (CW 方向)	15.6ms	11.25	
5	スルー (CCW 方向)	15.6ms	11.25	
6	クロック (CW 方向)	15.6ms	0.25 (1pulse/720ms)	
7	クロック (CCW 方向)	15.6ms	0.25	
8	ホールド (保持)	—	—	
9	バックグラウンドノイズ	—	—	

10.4.3.3 測定データの処理及び評価結果の例

(1) 伝達関数計測

動電型加振器を用いて、パドル駆動機構の取り付け面における、基準入力とセンサ出力の比（伝達関数）を計測した。6 軸の並進・回転の伝達関数を図 10.4.3.3-1 に示す。

なお、図 10.4.3.3-1 に示す伝達関数の定義として、その分母をセンサ出力を用いたパドル駆動機構取り付け面基準のフォース、分子を動電型加振器入力を用いたパドル駆動機構取り付け面基準のフォースとし、パドル駆動機構取り付け面のフォースで比較していることに注意されたい。

この結果から、300Hz 弱から 500Hz までにいくつかの共振／反共振ピークが観察され、測定値が増幅／低減することが予想される。

本測定では、取得した伝達関数を用いて、測定値の補正を行っている。

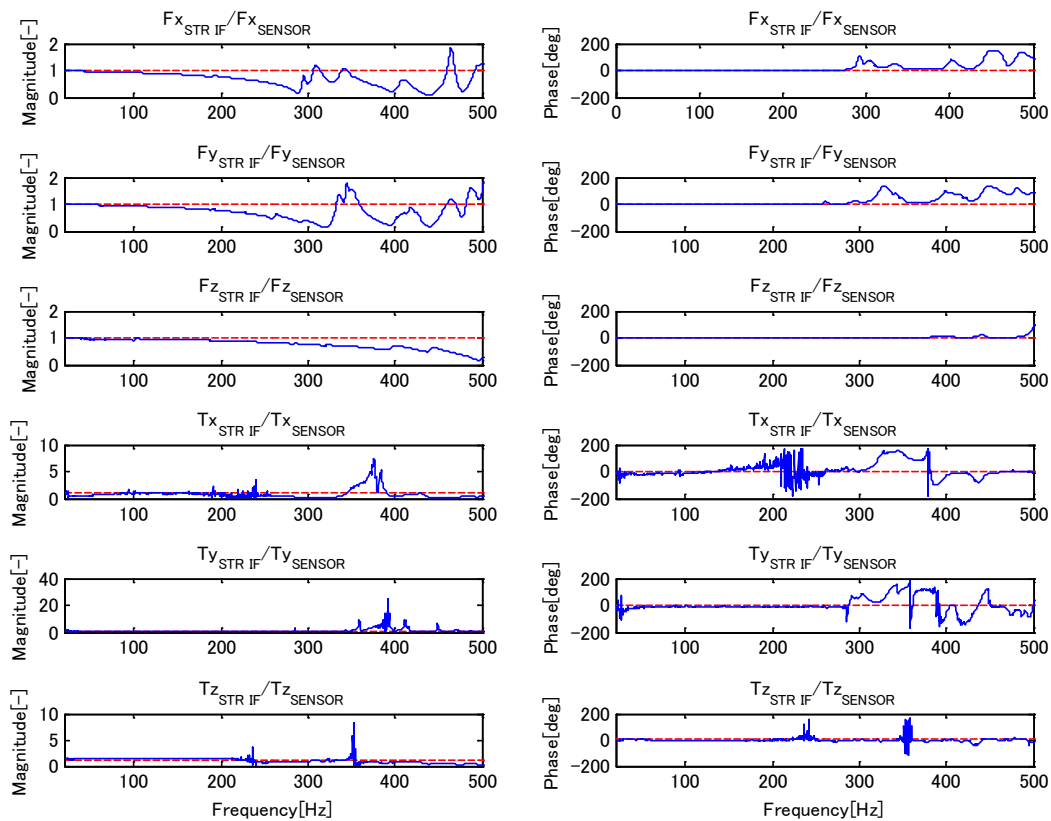


図 10.4.3.3-1 測定系の伝達関数（左：ゲイン、右：位相）

注意：伝達関数の定義は以下としている。

伝達関数 = (動電型加振器入力を用いたパドル駆動機構取り付け面基準のフォース) / (センサ出力を用いたパドル駆動機構取り付け面基準のフォース)

(2) 信号解析と解析結果例

測定データについては以下の処理及び解析を実施し、狭帯域のパワーを求めた。

- 平均値のゼロ化（平均値で除算）
- ローパスフィルタ処理（評価対象帯域上限の 250Hz 以上をカットオフ）
- PSD 演算
 - ・ PSD 推定アルゴリズム：ペリオドグラム法（直接法）
 - ・ アルゴリズム中の FFT 解析条件

データ長：2sec、データ数： 2^{13} (8192)、窓関数：ハンニング

- 狭帯域のパワー計算 (= $\sqrt{PSD} \times \Delta f$ (データ長の逆数) [N rms] or [Nm rms])

注記：c) ~d)は、180sec 間の測定データを 2sec の区間（50%オーバーラップ）

- ブ) にて狭帯域のパワーを求め、それらの平均値を求めた。
- e) 伝達関数を用いた補正 (図 10.4.3.3-1 のゲインを乗算)

次に、測定データ例および解析結果例として、表 10.4.3.2-2 のケース#4,6,8,9 について、測定時間 180sec の 6 軸成分の時系列 (上記 a) b) 処理後)、2sec 区間の代表時系列、狭帯域のパワーを示す。

試験結果の概要は以下のようである。

- バックグラウンドの狭帯域パワーのグラフ (図 10.4.3.3-13) に有意なスペクトルは見られず、外乱は無視できる。
- スルーモード、クロックモードの時系列 (図 10.4.3.3-2,3,5,6) より、並進成分 (X 軸方向) に $0.1 \sim 0.2 [N_{0-P}]$ 、回転成分 (Z 軸 (回転軸) 周り) に $0.1 \sim 0.2 [Nm_{0-P}]$ の擾乱が発生している。駆動信号 (パルス) に同期してインパルス状の擾乱が立ち上がり、パルス間隔の間に減衰している。それぞれのインパルス状の波形はほぼ相似ではあるが、若干の増減や形状の違いなども見られる。
- スルーモードの狭帯域パワーのグラフ (図 10.4.3.3-4) より、パルス間隔 (15.6ms) に相当する周波数 (約 64Hz) 及びその整数倍の周波数に線スペクトルが見られる。
- クロックの狭帯域パワーのグラフ (図 10.4.3.3-7) はスルーモードの狭帯域パワーのグラフと異なり、線スペクトルが現れていない。図 10.4.3.3-6(b) の波形拡大図が示すように、各波形の形状が異なることが一因と考えられるが、解析手法に問題がないか引き続き検討したい。
- ホールドモードは、並進成分にピークが現れているものの、バックグラウンドと差異はなく、ホールド時にモータ制御系などに起因する擾乱は発生していないと判断される。

上記の試験結果を通して、以下にパドル駆動機構が発生する擾乱の特徴を述べる。

- 擾乱の発生源はステップモータのステップ駆動 (振動) であり、パルス間隔に相当する周波数、及びその整数倍の周波数に線スペクトルが現れる。(整数倍の周波数に線スペクトルが現れるのは、10.4.1.2 項で説明したように、力・トルクの伝達経路上に平歯車のすきま等、非線形要素が存在するためと思われる。)
- 回転駆動軸周りの成分だけでなく、並進成分にも無視できない擾乱量が現れる。(平歯車を介して伝達することが一つの理由として想定されるが、詳細メカニズムは今後の研究課題である)

(3) 擾乱結果の整理

本試験結果に基づくパドル駆動機構の擾乱評価試験結果の整理として、表 10.4.3.3-1 に示す整理を試みた。

整理の方法としては、周波数領域表現として、主要擾乱周波数成分とその振幅を整理した。

なお、クロックモードについては、図 10.4.3.3-6 に示すように時系列データ上は間欠的な擾乱フォース・トルクの脈動が表われ周期性が確認できるが、図 10.4.3.3-7 に示すように周波数分析結果では明確な線スペクトルが見られていない(その原因は十分分かっていない)。表 10.4.3.3-1 では、原理上、ステップモータのパルス間隔の周期で擾乱が励起されるとの知見と、時系列データの代表的な波形から振幅、周期を読み取っている。

表 10.4.3.3-1 パドル駆動機構(PDM)擾乱測定結果整理

駆動モード	成分	上段：擾乱周波数[Hz]			備考
		下段：擾乱振幅値[N/Nm](r.m.s.)			
スルーモード (11.25deg/min.)	Fx	64	128	193	図 10.4.3.3-4 の線スペクトル (周波数、振 幅値) 読み取 り
		0.007	0.0235	0.0218	
	Fy	64	128	193	
		0.0034	0.0075	0.0065	
	Fz	64	128	193	
		0.0037	0.0046	0.0035	
Tx	64	128	193		
Ty	64	128	193		
Tz	64	128	193		
クロックモード (0.25deg/min.)	Fx	1.39(*)	167~200(**)	N/A	振幅値は o-p の最大値 *:フォース/ トルクが表わ れる周波数 (ステップモ ータ駆動周波 数) **:脈動周波 数(バラつき あり)
		—	0.29	N/A	
	Fy	1.39(*)	167~200(**)	N/A	
		—	0.16	N/A	
	Fz	1.39(*)	167~200(**)	N/A	
		—	0.055	N/A	
Tx	1.39(*)	167~200(**)	N/A		
Ty	1.39(*)	167~200(**)	N/A		
Tz	1.39(*)	167~200(**)	N/A		
ホールドモード	全成分	0 (擾乱発生せず)			バックグラウ ンドと有意な 差無し

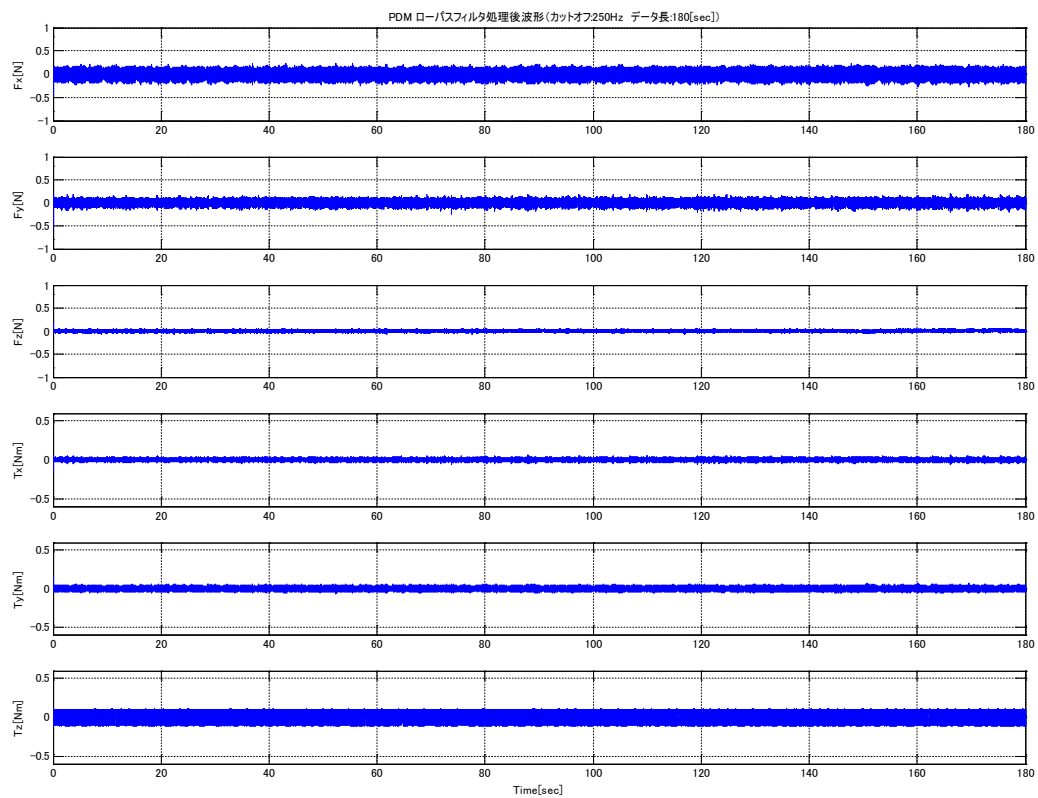
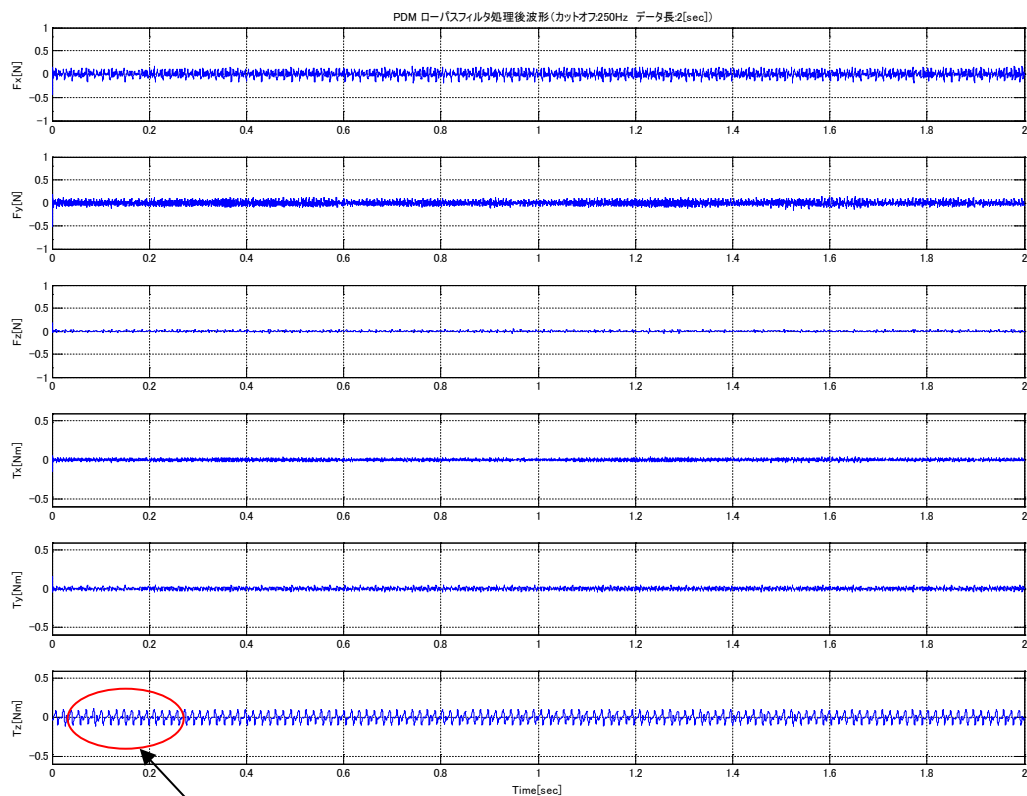
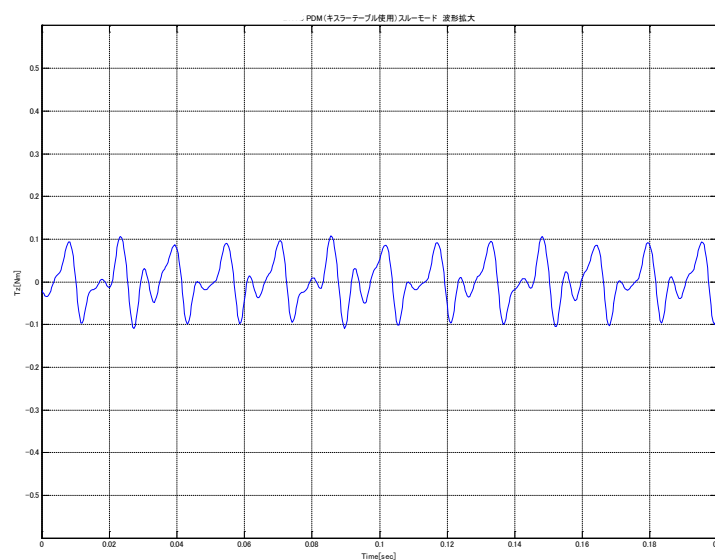


図 10.4.3.3-2 スルーモード (ケース#4) 時系列 (測定時間 180sec 全体)



(b)に拡大図を示す

(a) 時系列 (解析データ長 2sec 代表)



(b) 時系列 (Tz 成分 波形拡大)

図 10.4.3.3-3 スルーモード (ケース#4)

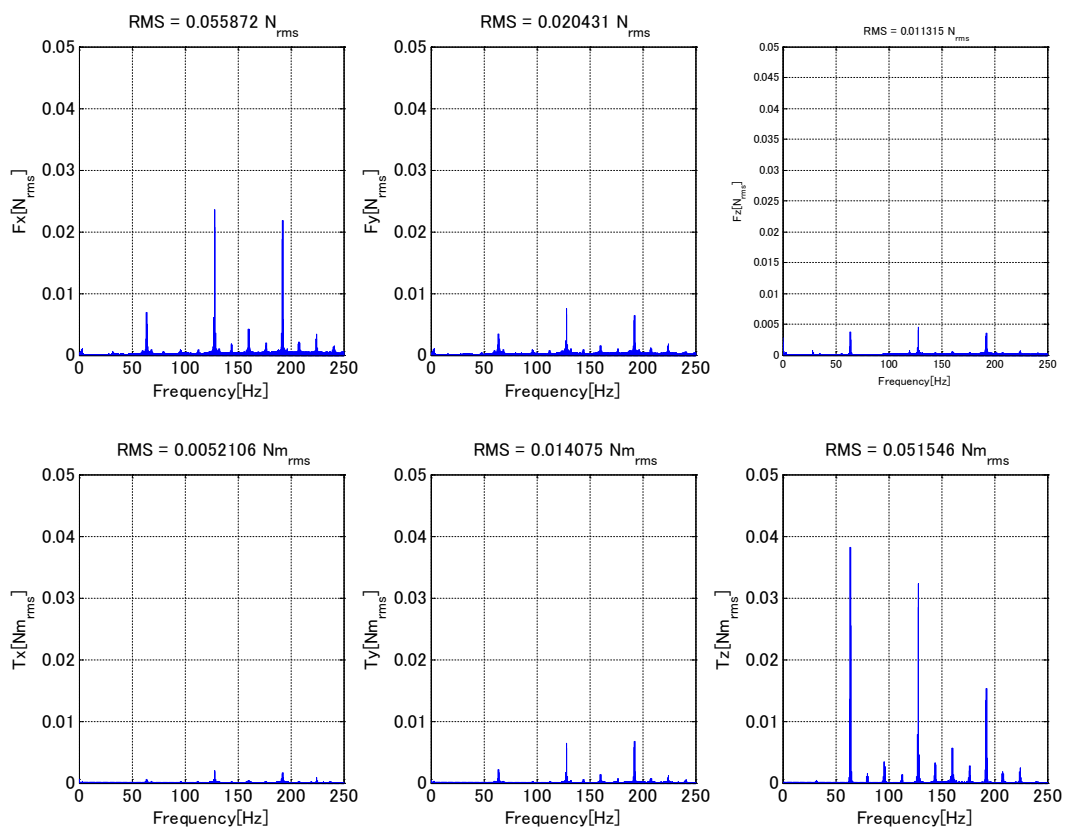


図 10.4.3.3-4 スルーモード (ケース#4) 狭帯域パワー (平均)

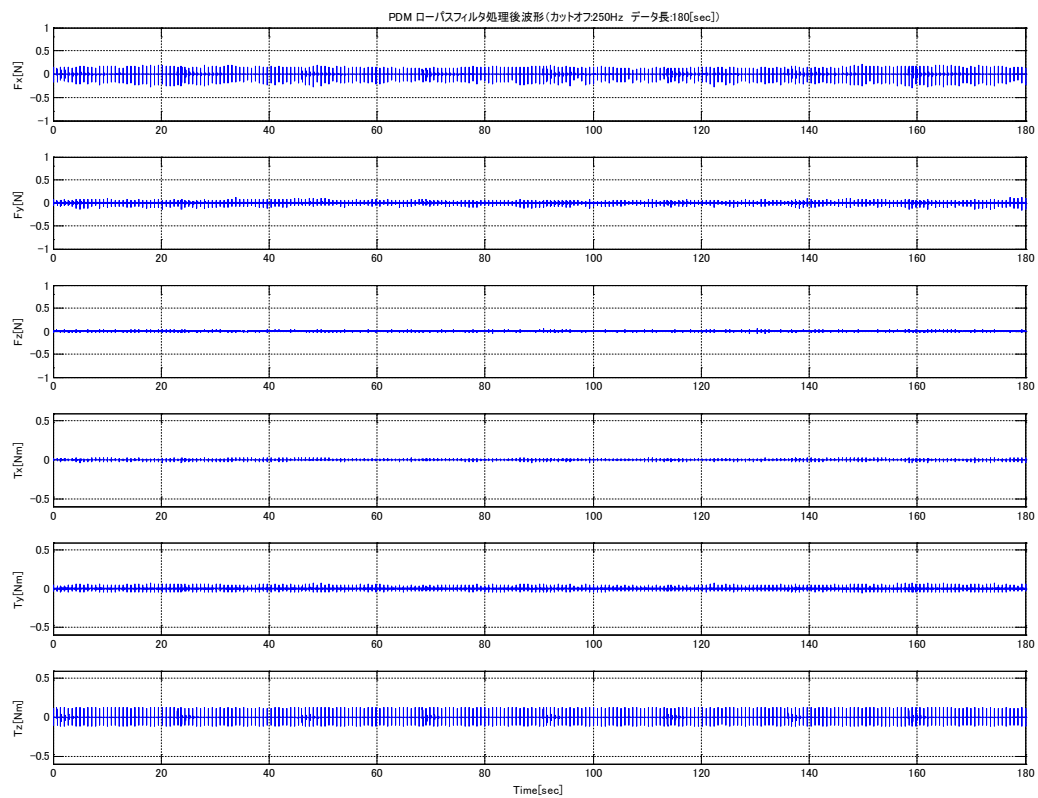
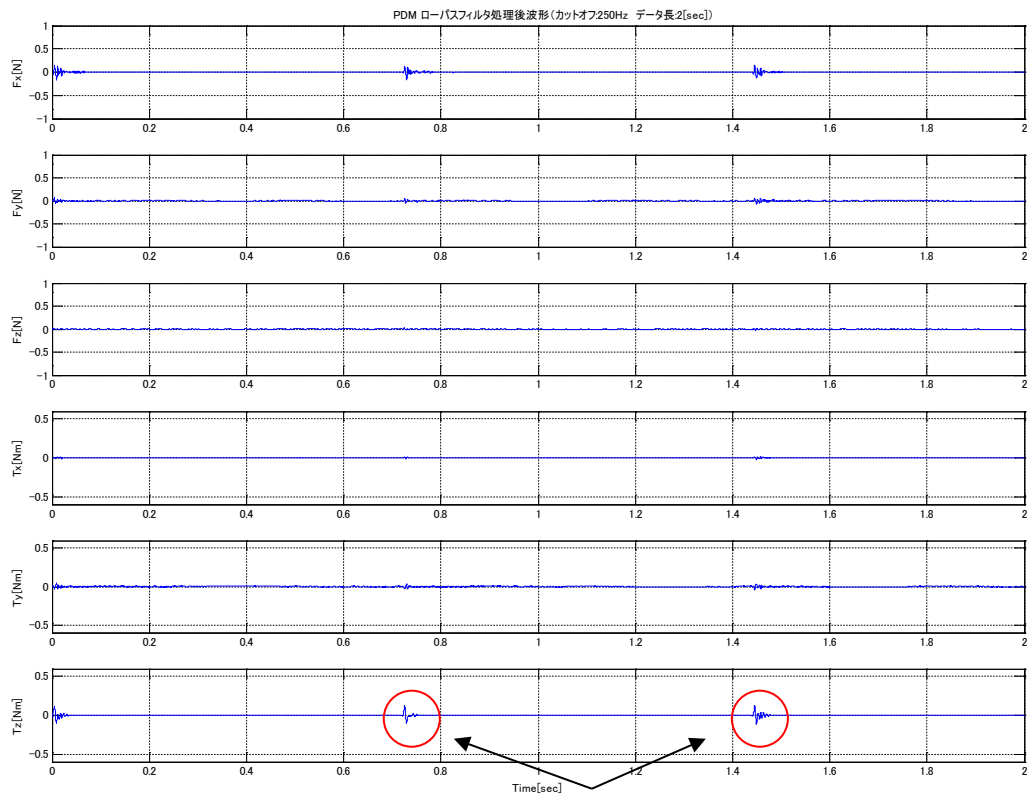
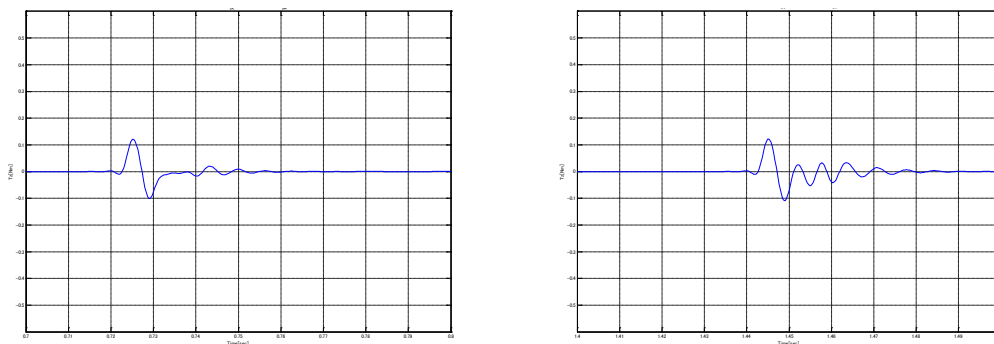


図 10.4.3.3-5 クロックモード (ケース#6) 時系列 (測定時間 180sec 全体)



(b)に拡大図を示す

(a) 時系列 (解析データ長 2sec 代表)



(b) 時系列 (Tz 成分波形拡大)

図 10.4.3.3-6 クロックモード (ケース#6)

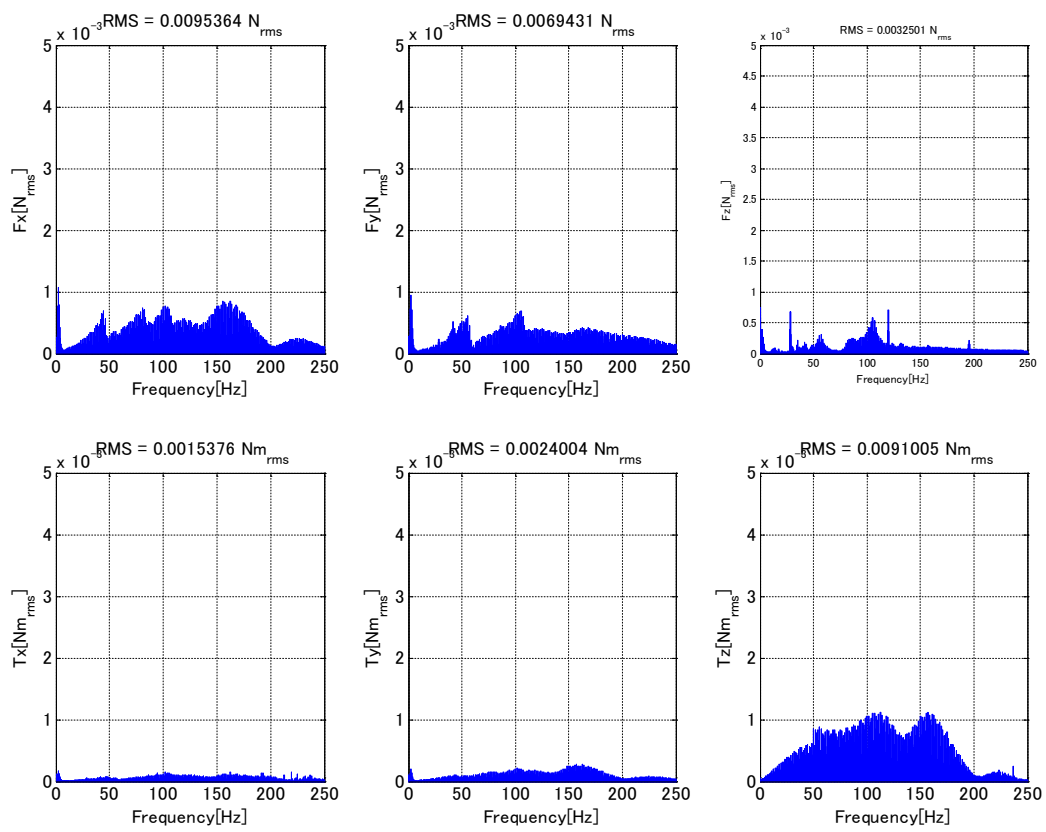


図 10.4.3.3-7 クロックモード (ケース#6) 狭帯域パワー (平均)
 (縦軸のレンジは、図 10.4.3.3-4 より一桁小さいことに注意)



図 10.4.3.3-8 ホールドモード (ケース#8) 時系列 (測定時間 180sec 全体)
(擾乱量は量的に十分小さい)

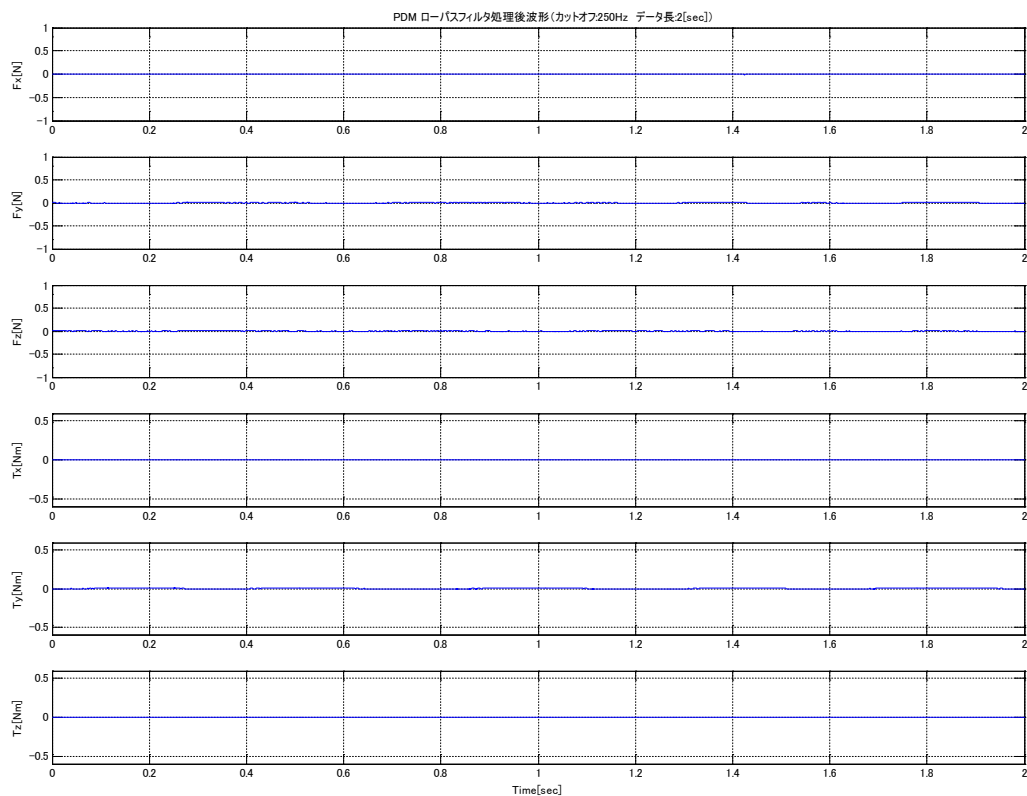


図 10.4.3.3-9 ホールドモード (ケース#8) 時系列 (解析データ長 2sec 代表)
(擾乱量は量的に十分小さい)

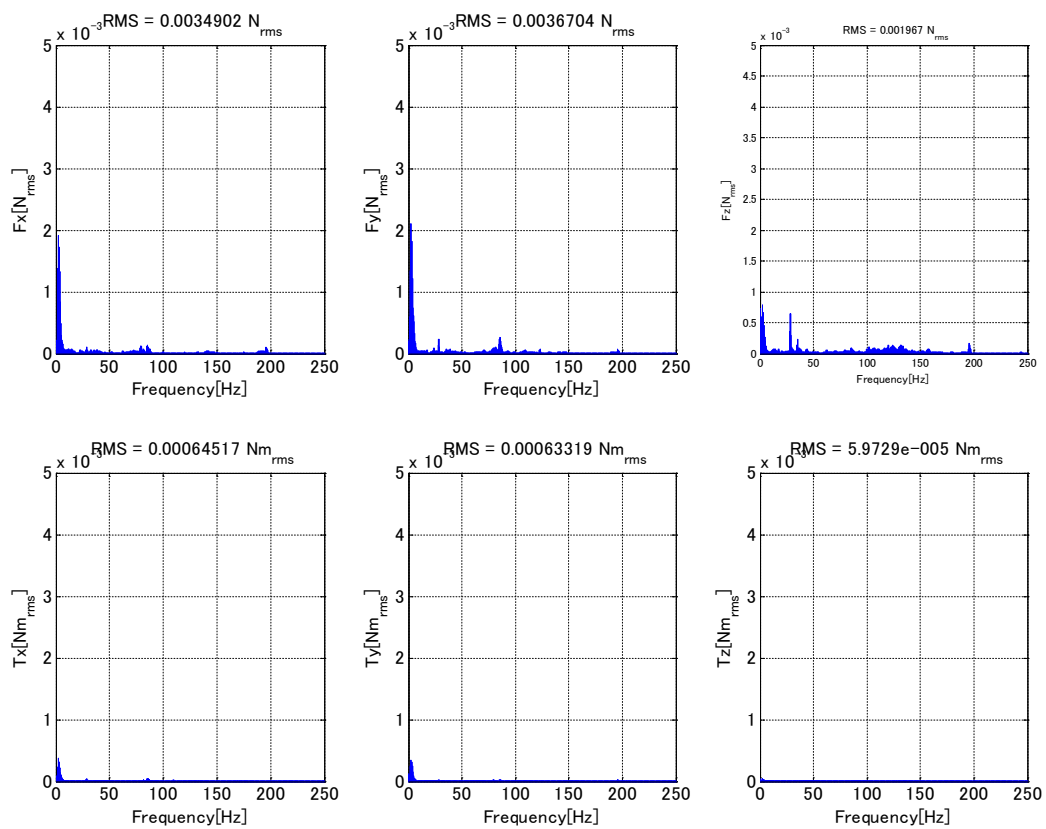


図 10.4.3.3-10 ホールドモード（ケース#8）狭帯域パワー（平均）
 （縦軸のレンジは、図 10.4.3.3-4 より一桁小さいことに注意）



図 10.4.3.3-11 バックグラウンド (ケース#9) 時系列 (測定時間 180sec 全体)
(擾乱量は量的に十分小さい)

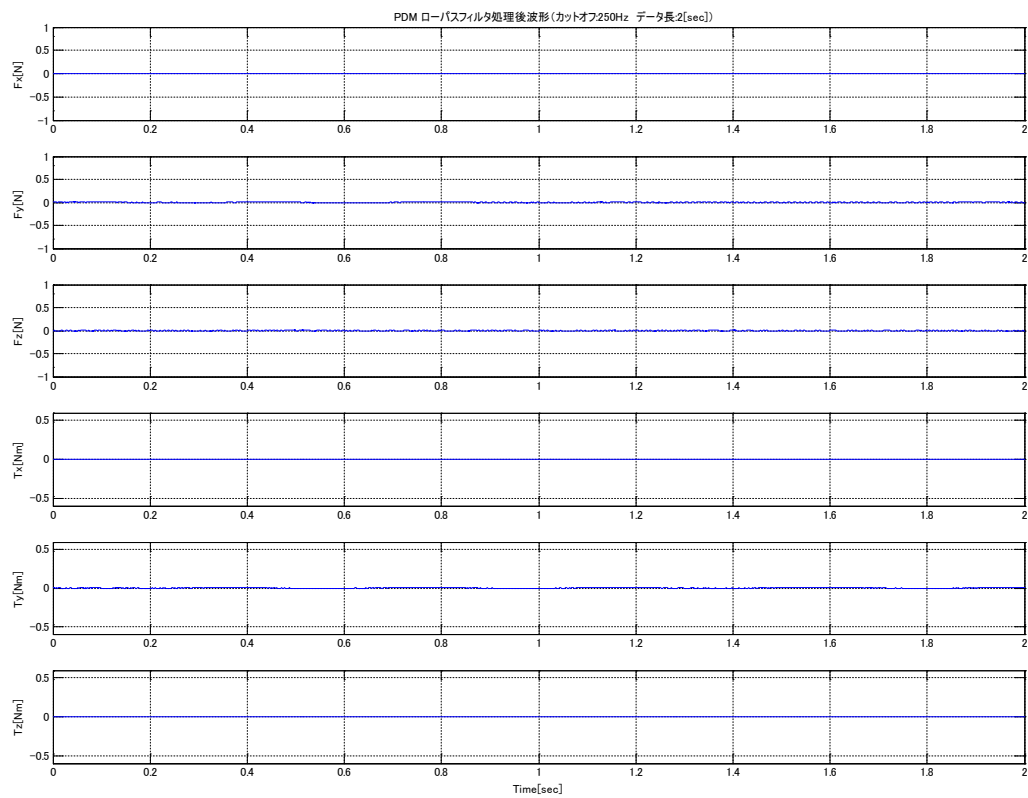


図 10.4.3.3-12 バックグラウンド (ケース#9) 時系列 (解析データ長 2sec 代表)
(擾乱量は量的に十分小さい)

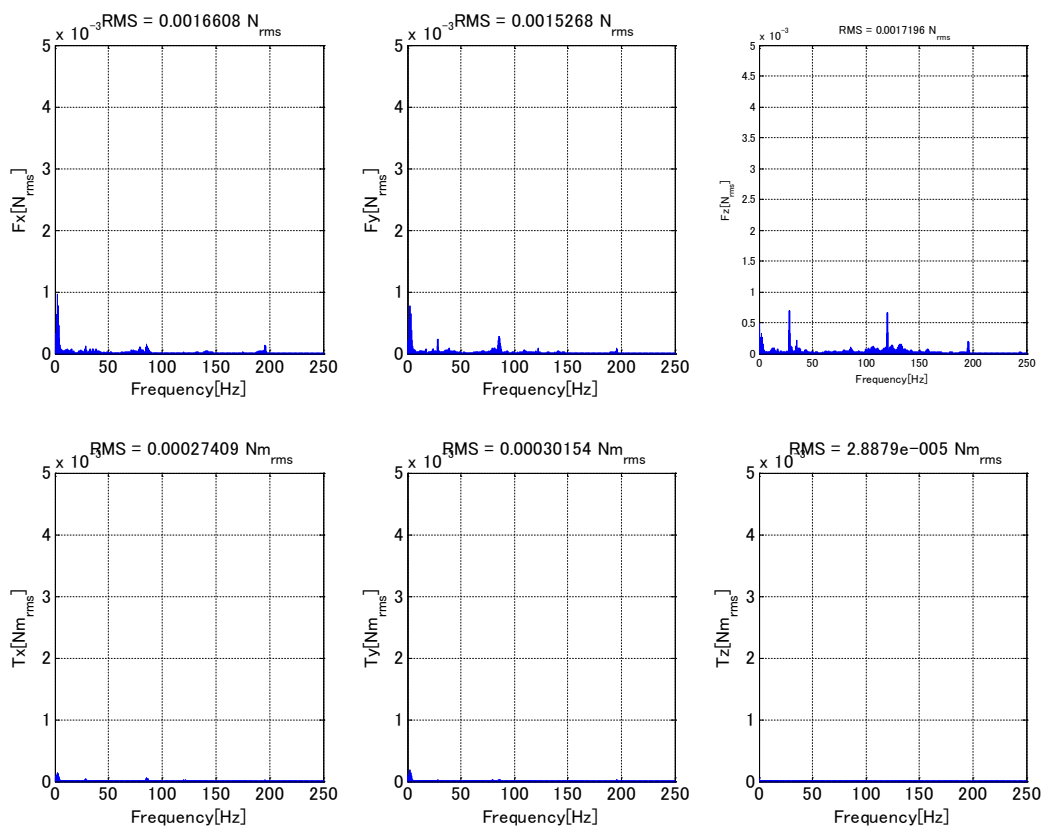


図 10.4.3.3-13 バックグラウンド (ケース#9) 狭帯域パワー (平均)
 (縦軸のレンジは、図 10.4.3.3-4 より一桁小さいことに注意)

10.4.4 留意事項

パドル駆動機構（PDM）に駆動信号を送出する駆動回路の特性が影響する可能性があり、駆動回路実機もしくは特性が同等であることが確認された駆動回路を使用する。

参考に、パドル駆動機構の擾乱に関する文献[10.10] [10.11]では、本項では扱っていない力学モデル（駆動回転軸周り擾乱のみ）を扱っている。

10 章 参考文献

- [10.1] 井澤 克彦, 市川 信一郎, 高速回転ホイール, 宇宙航空研究開発機構研究開発報告, JAXA-RR-07-25, 2008
- [10.2] Bialke, B., “High Fidelity Mathematical Modeling of Reaction Wheel Performance”, AAS paper 98-063, 21st AAS Guidance and Control Conference, February 1998, Breckenridge, CO, USA.
- [10.3] 初鳥 陽一他, エアテーブル式低周波微小擾乱測定装置によるリアクションホイールの発生擾乱解析, 第 47 回宇宙科学技術連合講演会講演集 (2003)
- [10.4] 小野 芙未彦, —小型宇宙システム共同開発を支える企業・組織— 宇宙用システム実験装置 (設計・加工・組立) 株式会社小野電機製作所, 日本航空宇宙学会誌 Vol.58, No.673 (2010)
- [10.5] 平田 晋吾, 小島 正人, 大地 一嘉, 人工衛星搭載用 TDG-IRU の小型軽量化, 三菱プレシジョン技報, Vol.6 (2011)
- [10.6] Kanao, K., et al. “Overview of Sumitomo coolers and Dewars for space use”, Proceedings Volume 9821, Tri-Technology Device Refrigeration (TTDR); 98210C (2016)
- [10.7] Sato Y, et al., “Conceptual design of cryogenic system for the next-generation infrared space telescope SPICA,” Proceedings Volume 7731, Space Telescopes and Instrumentation 2010
- [10.8] 地球資源衛星 1 号(JERS-1)による成果及び機能停止原因について, 第 19 回宇宙開発委員会 (定例会議) 資料 (委 19-1) , 1999 年 5 月 19 日
- [10.9] JAXA デジタルアーカイブス
<https://jda.jaxa.jp/result.php?lang=j&id=7dce2a249eee5f16c080a9c7e5531146>
 (2026 年 2 月 17 日アクセス)
- [10.10] 岩名 泰典他, 地球資源衛星 1 号 (JERS-1) の姿勢角速度変動の解析, 日本機械学会論文集 (C 編) , Vol.64, No.626, 1988
- [10.11] Kamiya, T., “Stepping Motor Driving Disturbance Test and Identification of Mathematical Disturbance Model”, IFAC Proceedings of 17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, 2007

付録－I 擾乱応答の推定理論

本章では、剛固定時の擾乱源が発生する擾乱力と衛星構体の伝達特性の関係に関して、文献[I.1][I.2]に記載されている定式化に習い、ビルディングブロック法[I.3][I.4]を用いて理論的に求める。

I.1 分系表現と伝達関数合成

図 I.1-1(a)に示す一般的な 2 分系の伝達関数の合成について考えよう。

\mathbf{F} は分系に作用するフォース（回転成分のトルクを含む）で、 \mathbf{A} は加速度（並進と回転の両方の成分を含む）を表すものとし、それらの右下付き添え字は分系上の点の番号を表すものとする。結合系では図 I.1-1(b)のように、点②と点③が一致し、結合点に外力 \mathbf{F}_e が作用すると仮定する。

例えば、分系 1 を衛星構体、分系 2 を擾乱源と見なした場合には、点①は衛星構体上のミッション観測機器の設置点であり、点②③は擾乱源と衛星構体のインタフェース(I/F)点（結合点）となる。そして、点④は擾乱源の内部でのフォースの作用点（例えば、ホイール内部のロータとベアリングが接する点）となり、この点でのフォースや加速度は一般的に直接計測することが困難である。なお、衛星構体と擾乱源の結合を考えた場合には、結合点②（点③）での外力 \mathbf{F}_e は通常は零で、ミッション観測機器に外力は作用しないため \mathbf{F}_4 も零であるが、ここでは零ではないものとして一般的に定式化を進める。また、擾乱源が回転体の場合には、厳密には分系 2 の伝達関数などはジャイロ効果のため回転体の回転速度に依存する量となるが、この定式化では依存しないものと仮定する。

まず、結合しない場合の分系 1 と分系 2 の \mathbf{F} と \mathbf{A} の関係式は次のようである。

[分系 1] :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1(\omega) \\ \mathbf{A}_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}(\omega) & \mathbf{H}_{12}(\omega) \\ \mathbf{H}_{21}(\omega) & \mathbf{H}_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1(\omega) \\ \mathbf{F}_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.1-1})$$

[分系 2] :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_3(\omega) \\ \mathbf{A}_4(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{33}(\omega) & \mathbf{H}_{34}(\omega) \\ \mathbf{H}_{43}(\omega) & \mathbf{H}_{44}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_3(\omega) \\ \mathbf{F}_4(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.1-2})$$

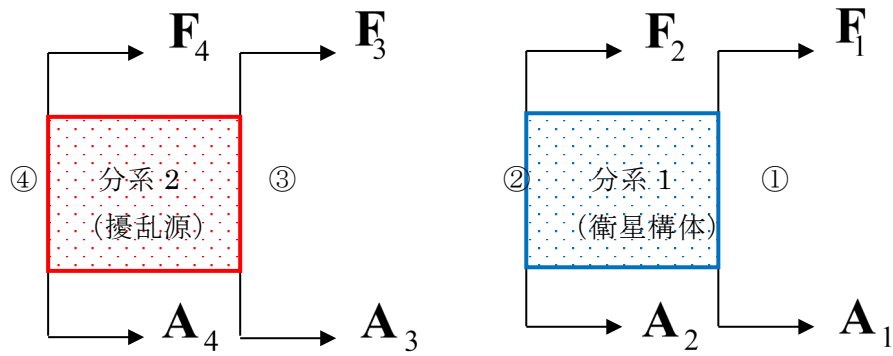
ここで、 ω は角振動数で、 $\mathbf{H}_{ij}(\omega)$ は点 j 入力（フォース入力）に対する点 i 出力（加速度出力）の伝達関数である。なお、以降便宜的に必要に応じて (ω) を除いた記載を用いる。

今後式の展開で使用するものは式(I.1-1)(I.1-2)の中の以下の 3 つの式であるので、抜き出して改めて表す。

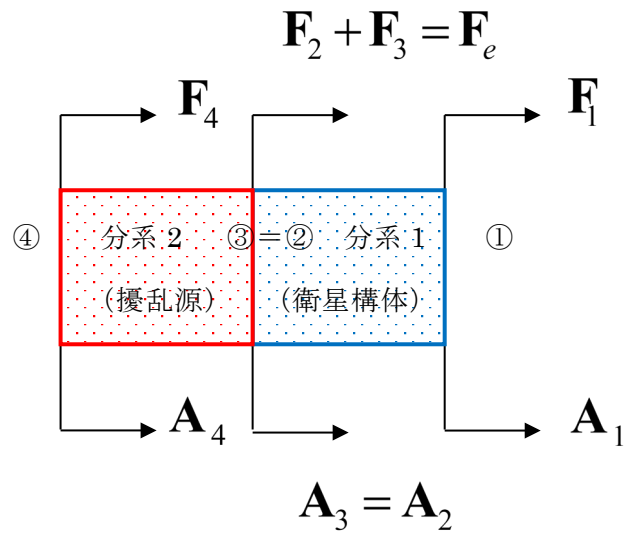
$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{H}_{11}\mathbf{F}_1 + \mathbf{H}_{12}\mathbf{F}_2 \quad (\text{I.1-3})$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{H}_{21}\mathbf{F}_1 + \mathbf{H}_{22}\mathbf{F}_2 \quad (\text{I.1-4})$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{H}_{33}\mathbf{F}_3 + \mathbf{H}_{34}\mathbf{F}_4 \quad (\text{I.1-5})$$



(a) 分系



(b) 結合系

図 I.1-1 分系表現

点②と点③で結合する際の結合条件として、剛結合を仮定すると、

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 \tag{I.1-6}$$

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_e \tag{I.1-7}$$

である。これらの関係式を用いて結合系におけるフォース $\mathbf{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_e)$ と加速度 $\mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ の関係を求める。まず、結合点② (点③) でのフォース \mathbf{F}_2 を求めると、式(I.1-4)(I.1-5)(I.1-6)(I.1-7)より

$$\mathbf{H}_{21}\mathbf{F}_1 + \mathbf{H}_{22}\mathbf{F}_2 = \mathbf{H}_{33}(-\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_e) + \mathbf{H}_{34}\mathbf{F}_4$$

であるので、これを \mathbf{F}_2 に関して表して、

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_e = -(\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{21}\mathbf{F}_1 + (\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{33}\mathbf{F}_e + (\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{34}\mathbf{F}_4 \quad (\text{I.1-8})$$

と得ることできた。これを式(I.1-3)(I.1-4)に代入して、結合系でのフォースと加速度の関係を表式として得る。

$$\mathbf{A}_1 = \{\mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12}(\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{21}\}\mathbf{F}_1 + \mathbf{H}_{12}(\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{33}\mathbf{F}_e + \mathbf{H}_{12}(\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{34}\mathbf{F}_4 \quad (\text{I.1-9})$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \{\mathbf{H}_{21} - \mathbf{H}_{22}(\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{21}\}\mathbf{F}_1 + \mathbf{H}_{22}(\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{33}\mathbf{F}_e + \mathbf{H}_{22}(\mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})^{-1}\mathbf{H}_{34}\mathbf{F}_4 \quad (\text{I.1-10})$$

I.2 剛固定条件の擾乱源単体の発生荷重

擾乱源単体が発生する荷重について考えてみよう。以降、識別しやすいように、左上付き添え字が D の場合は擾乱源単体の成分を表すものとする。さらに、擾乱源の点③における動質量（同一点におけるフォースに対する加速度の伝達関数の逆数）を次のように定義する。

$${}^D\mathbf{M} \equiv {}^D\mathbf{H}_{33}^{-1} \quad (\text{I.2-1})$$

擾乱源（分系 2）単体で I/F 点（点③）を剛固定した状態でのフォースは式(I.1-5)において

$${}^D\mathbf{A}_3 = \mathbf{O}$$

とすることで、式(I.1-7)より衛星構体に作用するフォース \mathbf{F}_2 に向き（ \mathbf{F}_3 と逆向き）に合わせると、

$${}^D\mathbf{W} \equiv -{}^D\mathbf{F}_{3b} = {}^D\mathbf{M}{}^D\mathbf{H}_{34}{}^D\mathbf{F}_4 \quad (\text{I.2-2})$$

と求めることができる。ここで、右下付き添え字 b は剛固定条件での値を表すものとする。式(I.2-2)の ${}^D\mathbf{W}$ は剛固定した状態でのフォース（6 成分）が直接測定できるキスラーテーブルなどの 6 軸動力計を用いて取得することが可能である。これが直接法である。

直接法による測定が困難な場合には、次に述べる間接法を使うことができる。これは境界自由条件の取り付け点での発生加速度と動質量を使って間接的に剛固定時のフォースを求める方法である。擾乱源を境界自由条件のもとに置いたとすると、式(I.1-5)で

$${}^D\mathbf{F}_3 = \mathbf{O}$$

とすることで、擾乱源の I/F 点（点③）での加速度を表式から得ることができる。

$${}^D\mathbf{A}_{3f} \equiv {}^D\mathbf{H}_{34}{}^D\mathbf{F}_4 \quad (\text{I.2-3})$$

ここで、右下付き添え字 f は境界自由条件での値を表すものとする。 ${}^D\mathbf{A}_{3f}$ は取り付け点に加速度計を設置することで計測可能である。これと取り付け点の動質量 ${}^D\mathbf{M}$ の積として、剛固定条件のフォースを表式から間接的に得ることができる。

$${}^D\mathbf{W} = {}^D\mathbf{M} {}^D\mathbf{A}_{3f} \quad (\text{I.2-4})$$

式(I.2-3)を式(I.2-4)に代入すると式(I.2-2)と一致することが分かる。これが加速度情報を使った間接法である。

I.3 擾乱応答推定に必要な衛星構体の伝達関数

図 I.1-1 で衛星構体（分系 1）とホイール等の擾乱源（分系 2）の結合系における構造伝達と式 (I.2-2)として表された剛固定時の擾乱力 ${}^D\mathbf{W}$ との関係を求める。

衛星構体と擾乱源の I/F 点（結合点）では点②（=点③）で外力が作用しないとし、ミッション機器が設置される点の評価点①でも外力が作用しないとすると、

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{F}_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{O} \quad (\text{I.3-1})$$

である。以降、識別しやすいように、左上付き添え字が S の場合は衛星構体の成分を表すものとする。そして、衛星構体の点②における動質量を次のように定義する。

$${}^S\mathbf{M} \equiv {}^S\mathbf{H}_{22}^{-1} \quad (\text{I.3-2})$$

すると、式(I.2-1)の ${}^D\mathbf{M}$ 、式(I.2-2)の ${}^D\mathbf{W}$ 、式(I.3-2)の ${}^S\mathbf{M}$ と、式(I.3-1)の条件を用いて、式(I.1-9)(I.1-10)はそれぞれ次式のように表すことができる。

$$\mathbf{A}_1 = {}^S\mathbf{H}_{12} {}^S\mathbf{M} ({}^S\mathbf{M} + {}^D\mathbf{M})^{-1} {}^D\mathbf{W} \quad (\text{I.3-3})$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = ({}^S\mathbf{M} + {}^D\mathbf{M})^{-1} {}^D\mathbf{W} \quad (\text{I.3-4})$$

よって、式(I.3-3)(I.3-4)から

$$\mathbf{A}_1 = {}^S\mathbf{H}_{12} {}^S\mathbf{M} \mathbf{A}_2 \quad (\text{I.3-5})$$

の関係を得る。これは、衛星構体単体（分系 1）の点②から点①までの加速度に対する加速度の伝達を表しており、伝達関数は衛星構体単体の試験・解析等から得ることができる。これを

$${}^S\mathbf{G} \equiv {}^S\mathbf{H}_{12} {}^S\mathbf{M} \quad (\text{I.3-6})$$

と定義すると、式(I.3-3)は次のように表すことができる。

$$\mathbf{A}_1 = {}^S\mathbf{G} ({}^S\mathbf{M} + {}^D\mathbf{M})^{-1} {}^D\mathbf{W} \quad (\text{I.3-7})$$

したがって、式(I.3-7)より、擾乱の応答を求めるために必要な情報は、擾乱源単体から得られる動質量 ${}^D\mathbf{M}$ と剛固定時のフォース ${}^D\mathbf{W}$ 、ならびに衛星構体単体の伝達関数 ${}^S\mathbf{G}$ と動質量 ${}^S\mathbf{M}$ であることが分かる。

ここまでは擾乱源が 1 個と見なしていたが、衛星構体に擾乱源が複数個 (N 個) 取り付けられている場合を考えると、この場合は式(I.3-7)中の ${}^D\mathbf{M}$ は j 番目の擾乱源の動質量 ${}^D\mathbf{M}_j$ (6×6 行列) を対角に N 個並べた下のような ($6N \times 6N$) 行列となる。

$${}^D\mathbf{M}(\omega) \equiv \begin{bmatrix} {}^D\mathbf{M}_1(\omega) & & & & & \\ & {}^D\mathbf{M}_2(\omega) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & {}^D\mathbf{M}_j(\omega) & & \\ & & & & \ddots & \\ & \mathbf{O} & & & & {}^D\mathbf{M}_N(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{I.3-8})$$

${}^D\mathbf{W}$ は j 番目の擾乱源を剛固定した際のフォース ${}^D\mathbf{W}_j$ を並べた以下のような $(6N \times 1)$ ベクトルとなる。

$${}^D\mathbf{W}(\omega) \equiv \{ {}^D\mathbf{W}_1(\omega) \quad {}^D\mathbf{W}_2(\omega) \quad \dots \quad {}^D\mathbf{W}_j(\omega) \quad \dots \quad {}^D\mathbf{W}_N(\omega) \}^T \quad (\text{I.3-9})$$

一方でこのとき ${}^S\mathbf{M}$ は、衛星構体単体の N 個の擾乱源取り付け点のフォース $(6N$ 成分)に対する加速度 $(6N$ 成分)の伝達関数 $(6N \times 6N$ 行列)の逆数であり、これを広義の動質量と定義する。 ${}^S\mathbf{M}$ は式(I.3-8)のように一般的に構造化する訳ではない。

I.4 衛星構体に作用する荷重

式(I-1-8)(I.2-1)(I.2-2)(I.3-1)(I.3-2)から衛星構体の取り付けられたときに作用しているフォース \mathbf{F}_2 は次のように表すことができる。

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3 = {}^S\mathbf{M}({}^S\mathbf{M} + {}^D\mathbf{M})^{-1}{}^D\mathbf{W} = (\mathbf{E}_6 + {}^D\mathbf{M}{}^S\mathbf{M}^{-1})^{-1}{}^D\mathbf{W} \quad (\text{I.4-1})$$

ここで、 \mathbf{E}_j は $(j \times j)$ の単位行列を意味する。すると、式(I.4-1)は剛固定時のフォース ${}^D\mathbf{W}$ と衛星構体の取り付けられたときに実際に作用しているフォースとは一致しないことを表している。

付録-I 参考文献

- [I.1] Elias, L. M., "A Structurally Coupled Disturbance Analysis Method Using Dynamic Mass Measurement Techniques with Application to Spacecraft-Reaction Wheel Systems," Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, March 2001
- [I.2] Elias, L. M., and Miller, D. W., "A Coupled Disturbance Analysis Method Using Dynamic Mass Measurement Techniques", Proceedings of the 43rd Annual AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 2002, AIAA Paper 2002-1252.
- [I.3] Klosterman, A. L., and Lemon, J. R., "Building Block Approach to Structural Dynamics", ASME publication, 1969, VIBR-30
- [I.4] 大久保 信行著, 機械のモーダルアナリシス (第5版), 中央大学出版部, 2004年

付録－Ⅱ 動質量に関する補足

本章では、動質量に関する補足説明を以下に行う。

Ⅱ.1 連続体の動質量の導出

図Ⅱ.1-1のような1個の弾性体の運動方程式から6自由度の動質量を求めよう。

弾性体の点Pに固定した座標系を{a}とする。慣性空間の固定点をOとし、この点から点Pまでの距離ベクトルをxで表す。点Pから重心位置までの距離ベクトルをr_C、重心位置から弾性体の任意の点までの距離ベクトルをρ、弾性変形による変位量ベクトルをuで表す。そして、次の位置ベクトルRを定義する。

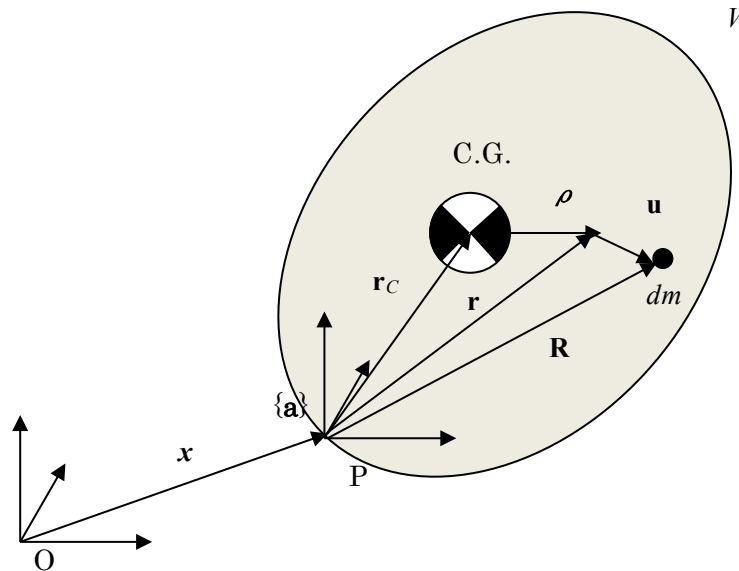
$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u} = \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\rho} + \mathbf{u} \quad (\text{Ⅱ.1-1})$$

次に、弾性体の並進と点P周りの回転に関する運動方程式、および弾性体の振動方程式を導く。微小要素dmに作用する力をdfとすると、ニュートンの第2法則から次式が成り立つ。

$$(\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{R}})dm = d\mathbf{f} \quad (\text{Ⅱ.1-2})$$

さらに、点P周りの回転の釣り合いを考えると、次式が成り立つ。

$$\mathbf{R} \times (\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{R}})dm = \mathbf{R} \times d\mathbf{f} \quad (\text{Ⅱ.1-3})$$



図Ⅱ.1-1 弾性体モデル

式(Ⅱ.1-2)(Ⅱ.1-3)を用いて、弾性体の体積V全体について積分すると次式を得る[Ⅱ.1]。

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{f} \quad (\text{Ⅱ.1-4})$$

$$\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{P} = \mathbf{t} \quad (\text{Ⅱ.1-5})$$

ここで、

$$\mathbf{f} \equiv \int_V d\mathbf{f} \quad (\text{II.1-6})$$

$$\mathbf{t} \equiv \int_V \mathbf{R} \times d\mathbf{f} \quad (\text{II.1-7})$$

は、それぞれ弾性体に作用する力と点 P 周りのトルクを表し、

$$\mathbf{P} \equiv \int_V (\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{R}}) dm \quad (\text{II.1-8})$$

$$\mathbf{H} \equiv \int_V \mathbf{R} \times (\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{R}}) dm \quad (\text{II.1-9})$$

はそれぞれ運動量ベクトルと、点 P 周りの角運動量ベクトルを表す。さらに、運動量ベクトル \mathbf{P} は次のように表すことができる^[II.1]。

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_V (\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}) dm = \int_V \{ \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{r}' + \mathbf{u}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \} dm \\ &= \int_V \{ \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \} dm \end{aligned} \quad (\text{II.1-10})$$

ここで、 $(\dot{\bullet})$ は慣性座標系に対する時間微分であるが、それに対して $(\bullet)'$ は弾性体固定の座標系 $\{\mathbf{a}\}$ に対する時間微分を表わしている。なお、式(II.1-10)の展開では

$$\mathbf{r}' = \mathbf{O}$$

の条件を用いた。そして、式(II.1-10)の慣性座標系に対する時間微分を考えると、運動量ベクトル \mathbf{P} の時間微分は次式のようなになる^[II.1]。

$$\dot{\mathbf{P}} \approx \int_V (\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}'' + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) dm = m\ddot{\mathbf{x}} + \int_V \mathbf{u}'' dm - \left(\int_V \mathbf{r} dm \right) \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} \quad (\text{II.1-11})$$

ただし、 $\boldsymbol{\Omega}$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, \mathbf{u} , \mathbf{u}' は微小と仮定して、2 次の微小項は省略した。よって、式(II.1-4) (II.1-11) より次式を得る。

$$m\ddot{\mathbf{x}} - \left(\int_V \mathbf{r} dm \right) \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \int_V \mathbf{u}'' dm = \mathbf{f} \quad (\text{II.1-12})$$

ここで、重心位置ベクトルの定義より

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} dm$$

であるので、並進に関する運動方程式は次式のようなになる。

$$m\ddot{\mathbf{x}} - m\mathbf{r}_C \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \int_V \mathbf{u}'' dm = \mathbf{f} \quad (\text{II.1-13})$$

次に、回転については式(II.1-5)の左辺は次のようなになる^[II.1]。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{P} &= \int_V (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times (\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{u}}) dm \\ &\approx \frac{d}{dt} \left\{ \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dm \right\} + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u}'' dm \\ &\quad + \int_V \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{x}} dm \end{aligned} \quad (\text{II.1-14})$$

結果的に、回転に関する運動方程式は次のようなになる。

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + m\mathbf{r}_C \times \ddot{\mathbf{x}} + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u}'' dm = \mathbf{t} \quad (\text{II.1-15})$$

ここで \mathbf{I} は、

$$\mathbf{I} \equiv \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \mathbf{E}_3 - \mathbf{r}\mathbf{r}) dm \quad (\text{II.1-16})$$

と定義される点 \mathbf{P} 周りの慣性ダイアディックで、 \mathbf{E}_j は $(j \times j)$ の単位行列である。

さらに、弾性変形について詳しく考えてみるために、弾性体を有限要素モデルのように集中質量系で離散化して考えてみよう。まず、外積の演算について、任意の 2 つのベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \{a_x \quad a_y \quad a_z\}^T \\ \mathbf{b} &= \{b_x \quad b_y \quad b_z\}^T \end{aligned}$$

の外積は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

のように、次の歪対称行列を使って表すことができる。

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

これを用いると、式(II.1-13)(II.1-15)は

$$m\ddot{\mathbf{x}} - m\tilde{\mathbf{r}}_C\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \sum_s \mathbf{u}'_s m_s = \mathbf{f} \quad (\text{II.1-17})$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + m\tilde{\mathbf{r}}_C\ddot{\mathbf{x}} + \sum_s \tilde{\mathbf{r}}_s \mathbf{u}'_s m_s = \mathbf{t} \quad (\text{II.1-18})$$

と表すことができる[II.1][II.2]。そして、弾性体固定の座標系 $\{\mathbf{a}\}$ の成分で表すとすると、モード座標系 q_i を導入し、点 \mathbf{P} を固定した条件での固有振動モードを φ_{si} を用いて弾性変位をモード重畳法で次のように \mathbf{u}_s を表す。

$$\mathbf{u}_s(t) = \sum_i \begin{Bmatrix} \varphi_{si}^x \\ \varphi_{si}^y \\ \varphi_{si}^z \end{Bmatrix} q_i(t) = \sum_i \varphi_{si} q_i(t) \quad (\text{II.1-19})$$

すると、

$$\sum_s \mathbf{u}'_s m_s = \sum_s \sum_i \varphi_{si} m_s \ddot{q}_i(t) = \sum_i \left(\sum_s \varphi_{si} m_s \right) \ddot{q}_i(t) = \sum_i \delta_i^0 \ddot{q}_i(t) \quad (\text{II.1-20})$$

$$\begin{aligned} \sum_s \tilde{\mathbf{r}}_s \mathbf{u}'_s m_s &= \sum_s \sum_i \tilde{\mathbf{r}}_s \varphi_{si} m_s \ddot{q}_i(t) = \sum_i \left(\sum_s \tilde{\mathbf{r}}_s \varphi_{si} m_s \right) \ddot{q}_i(t) \\ &= \sum_i \delta_i^1 \ddot{q}_i(t) \end{aligned} \quad (\text{II.1-21})$$

である。ここで、式(II.1-20)(II.1-21)では

$$\delta_i^0 \equiv \sum_s \varphi_{si} m_s \quad (\text{II.1-22})$$

$$\delta_i^1 \equiv \sum_s \tilde{\mathbf{r}}_s \varphi_{si} m_s \quad (\text{II.1-23})$$

と定義しているが、これらはそれぞれ 0 次と 1 次のカップリングベクトルと呼ばれるも

のである[III.1]。よって、式(II.1-17)から式(II.1-21)を用いてまとめると、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{E}_3 & -m\tilde{\mathbf{r}}_C \\ m\tilde{\mathbf{r}}_C & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \end{Bmatrix} + \sum_i \begin{Bmatrix} \delta_i^0 \\ \delta_i^1 \end{Bmatrix} \ddot{q}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.1-24})$$

次に、弾性変形に関する力の釣り合いを考える。まず、要素 s での力のつり合いは次のようである[III.1][II.2]。

$$k_s \mathbf{u}_s = -m_s (\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{r}}_s + \ddot{\mathbf{u}}_s) = -m_s (\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}_s'' + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_s) \quad (\text{II.1-25})$$

つまり、式(II.1-19)より

$$k_s \sum_i \varphi_{si} q_i + m_s \left\{ \ddot{\mathbf{x}} + \sum_i \varphi_{si} \ddot{q}_i + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_s \right\} = 0 \quad (\text{II.1-26})$$

である。上式の左辺より φ_{si}^T をかけ、全要素について足し合わせると次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_s \varphi_{si}^T k_s \sum_i \varphi_{si} q_i + \sum_s \varphi_{si}^T m_s \left\{ \ddot{\mathbf{x}} + \sum_i \varphi_{si} \ddot{q}_i + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_s \right\} \\ = \sum_s \varphi_{si}^T k_s \sum_i \varphi_{si} q_i + \sum_s \varphi_{si}^T m_s \ddot{\mathbf{x}} \\ + \sum_s \varphi_{si}^T m_s \sum_i \varphi_{si} \ddot{q}_i - \sum_s \varphi_{si}^T m_s \tilde{\mathbf{r}}_s \dot{\boldsymbol{\Omega}} \\ = \mu_i \omega_i^2 q_i + \delta_i^{0T} \ddot{\mathbf{x}} + \mu_i \ddot{q}_i - \delta_i^{1T} \dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1-27})$$

ここで、

$$\mu_i \equiv \sum_s \varphi_{si}^T m_s \varphi_{si} \quad (\text{II.1-28})$$

$$\mu_i \omega_i^2 \equiv \sum_s \varphi_{si}^T k_s \varphi_{si} \quad (\text{II.1-29})$$

で、それぞれ i 次の固有振動モードのモード質量およびモード剛性と呼ばれるもので、 ω_i は i 次の固有振動モードの固有角振動数である。ここで、速度比例のモード減衰を導入すると、最終的に i 次の固有振動モードに關数する運動方程式を次式として得ることができる。

$$\delta_i^{0T} \ddot{\mathbf{x}} - \delta_i^{1T} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \mu_i \omega_i^2 \ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \mu_i \dot{q}_i + \mu_i q_i = 0 \quad (\text{II.1-30})$$

ここで改めて次のように行列とベクトルを定義する。

$$\mathbf{M}_S \equiv \begin{bmatrix} m\mathbf{E}_3 & -m\tilde{\mathbf{r}}_C \\ m\tilde{\mathbf{r}}_C & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1-31})$$

$$\ddot{\mathbf{X}} \equiv \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\delta}_i \equiv \begin{Bmatrix} \delta_i^0 \\ \delta_i^1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix}$$

すると、式(II.1-24)(II.1-30)は次のように表すことができる。

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{X}} + \sum_i \boldsymbol{\delta}_i \ddot{q}_i = \mathbf{F} \quad (\text{II.1-32})$$

$$\delta_i^T \ddot{\mathbf{X}} + \mu_i \omega_i^2 \ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \mu_i \dot{q}_i + \mu_i q_i = 0 \quad (\text{II.1-33})$$

次に ω を角振動として、上式をフーリエ変換して $q_i(\omega)$ を消去すると、最終的に次式を得る。

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{M}(\omega)(-\omega^2)\mathbf{X}(\omega) \quad (\text{II.1-34})$$

この伝達関数 $\mathbf{M}(\omega)$ が動質量と呼ばれるもので、次式のように定義している。

$$\mathbf{M}(\omega) \equiv \mathbf{M}_S + \sum_i \omega^2 H_i(\omega) \mathbf{M}_{ei} \quad (\text{II.1-35})$$

そして、 \mathbf{M}_{ei} は次式で定義される i 次の固有振動モードの有効モード質量で、 6×6 の定数行列である[II.3]。

$$\mathbf{M}_{ei} \equiv \frac{1}{\mu_i} \delta_i \delta_i^T$$

$H_i(\omega)$ は次のように定義される i 次の固有振動モードの周波数応答関数である。

$$H_i(\omega) \equiv \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i \omega_i \omega}$$

動質量 $\mathbf{M}(\omega)$ に対して、式(II.1-35)右辺第1項 \mathbf{M}_S は静質量もしくは剛質量とよばれる定数行列で、弾性変形しない静的な状態($\omega = 0$)の動質量を意味する。

次に、具体的に点P基準の静質量 \mathbf{M}_S の行列の中身を考えてみよう。弾性体固定の座標系 $\{\mathbf{a}\}$ での重心位置ベクトル \mathbf{r}_C の要素と位置ベクトル \mathbf{r} の要素をそれぞれ次のように定義する。

$$\mathbf{r}_C = \{X_{CG} \quad Y_{CG} \quad Z_{CG}\}^T \quad (\text{II.1-36})$$

$$\mathbf{r} = \{r_1 \quad r_2 \quad r_3\}^T$$

すると、点P周りの慣性ダイアディック \mathbf{I} は式(II.1-16)より次のような行列となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_V \begin{bmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_2 r_1 & r_3^2 + r_1^2 & -r_2 r_3 \\ -r_3 r_1 & -r_3 r_2 & r_1^2 + r_2^2 \end{bmatrix} dm \\ &\equiv \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.1-37})$$

そして、 \mathbf{M}_S は式(II.1-31)(II.1-36)(II.1-37)より次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S &\equiv \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mZ_{CG} & -mY_{CG} \\ 0 & m & 0 & -mZ_{CG} & 0 & mX_{CG} \\ 0 & 0 & m & mY_{CG} & -mX_{CG} & 0 \\ 0 & -mZ_{CG} & mY_{CG} & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mZ_{CG} & 0 & -mX_{CG} & -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -mY_{CG} & mX_{CG} & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.1-38})$$

もし、質点と見なせる場合には、 $\mathbf{r}_C = \mathbf{r} = \mathbf{O}$ であるので、動質量は次のように質量 m のみ依存する定数行列となる。

$$M(\omega) = M_S = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1-39})$$

次に、最も簡単な例として図 II.1-2 の境界自由条件の 2 自由度バネ-マス-ダンパ系の動質量を求めて、式(II.1-35)との関係を調べてみよう。まず、運動方程式は次のようである。

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + c\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\} + k\{x_1(t) - x_2(t)\} = f(t) \quad (\text{II.1-40})$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + c\{\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\} + k\{x_2(t) - x_1(t)\} = 0$$

上式をフーリエ変換し、周波数領域で表すと次のようになる。

$$-m_1 \omega^2 X_1(\omega) + c(j\omega)\{X_1(\omega) - X_2(\omega)\} + k\{X_1(\omega) - X_2(\omega)\} = F(\omega) \quad (\text{II.1-41})$$

$$-m_2 \omega^2 X_2(\omega) + c(j\omega)\{X_2(\omega) - X_1(\omega)\} + k\{X_2(\omega) - X_1(\omega)\} = 0$$

すると、動質量は次式として得ることができる。

$$M(\omega) = \frac{F(\omega)}{-\omega^2 X_1(\omega)} = m_1 + m_2 + \omega^2 \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2 + j2\zeta_1 \omega_1 \omega} m_2 \quad (\text{II.1-42})$$

ただし、

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad (\text{II.1-43})$$

$$\zeta_1 \equiv \frac{c}{2m_2}$$

と定義され、 ω_1 は図 II.1-3 のように質点 m_1 を剛固定した時の固有振動数である。このときは、運動方程式は単純に次のような 1 自由度系となる。

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + cx_2(t) + kx_2(t) = 0 \quad (\text{II.1-44})$$

ここで、

$$x_2(t) = \varphi_1 q(t)$$

となるようモード座標系 $q(t)$ を導入すると、モードベクトルはスカラー値となるので、

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{m_2}}$$

とすると、式(II.1-28)のモード質量は

$$\mu_1 = \varphi_1 m_2 \varphi_1 = 1$$

となって正規化され、式(II.1-44)のモード方程式は次のようになる。

$$\ddot{q}(t) + \frac{c}{m_2} \dot{q}(t) + \frac{k}{m_2} q(t) = 0$$

そして、式(II.1-22)の 0 次カップリングベクトルはスカラー値で、

$$\delta_1^0 = \varphi_1 m_2 = \sqrt{m_2}$$

となる。この場合は式(II.1-23)の回転に関する1次のカップリングベクトルは存在しないので、モード有効質量は結果的に

$$\mu_1^{-1} \delta_1 \delta_1^T = \mu_1^{-1} \delta_1^0 \delta_1^0 = m_2 \quad (\text{II.1-45})$$

となる。境界自由条件での系の静質量(全質量)が

$$M_S = m_1 + m_2$$

であることから、式(II.1-45)より式(II.1-42)が式(II.1-35)と一致することが分かる。

参考に、式(II.1-42)の動質量の絶対値(振幅)をプロットしたものを図II.1-4に示す。入力の角振動数 ω が零のときには静質量に一致し、高周波では m_1 に漸近している。そして、最初の共振点を与える周波数は剛固定条件の固有角振動数 ω_1 であり、次に現れる谷は境界自由条件での剛体モードを除いた振動モードに対する固有角振動数で、以下の周波数 $\hat{\omega}_1$ のときである[III.4]。

$$\hat{\omega}_1 \equiv \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} k$$

最後に、擾乱源ではないが衛星搭載機器の動質量の一例として、図II.1-5の米国NASA ハッブル宇宙望遠鏡に搭載された広視野惑星カメラ(WFPC2)の例を紹介する。図II.1-6にWFPC2のフォーシリミット振動試験の過程で測定した並進1成分の動質量を示す[III.6]。同図のように、全体的な傾向としては周波数が高くなると動質量は小さくなるが、個々のピーク値はモード有効質量の大きさと減衰比(応答倍率)に依存するため、一概に小さくなる訳ではない。なお、動質量の測定方法の例を次節に改めて紹介する。

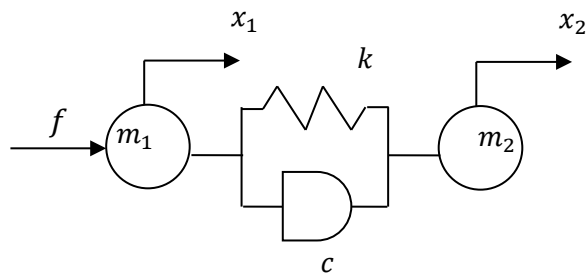


図 II.1-2 自由条件下での 2 自由度バネ-マス-ダンパ系

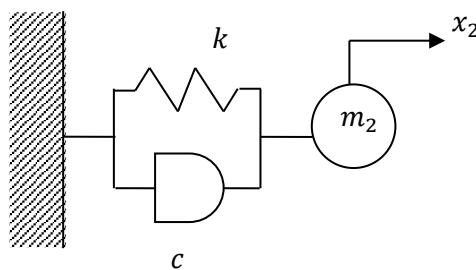


図 II.1-3 剛固定条件下での 1 自由度バネ-マス-ダンパ系

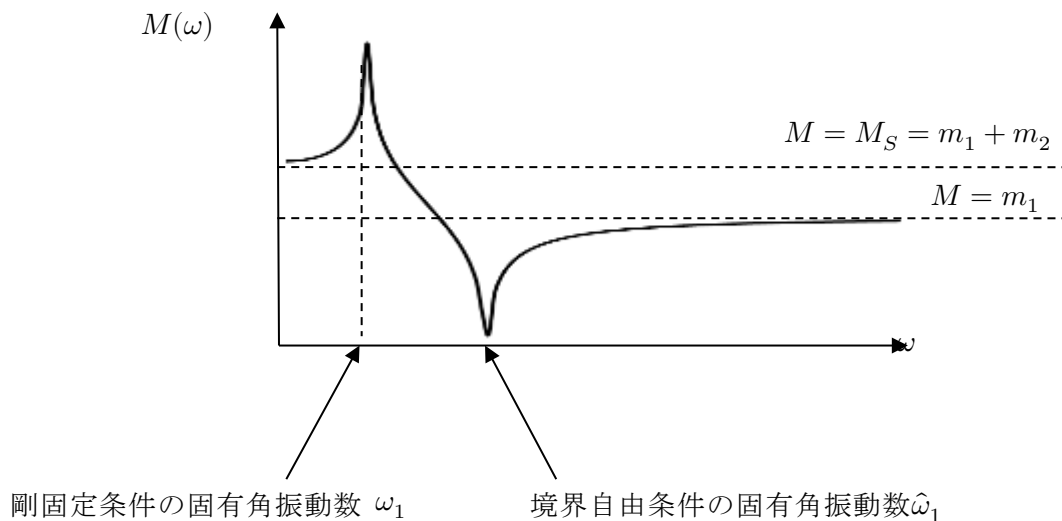


図 II.1-4 2 自由度バネ-マス系の動質量（振幅）

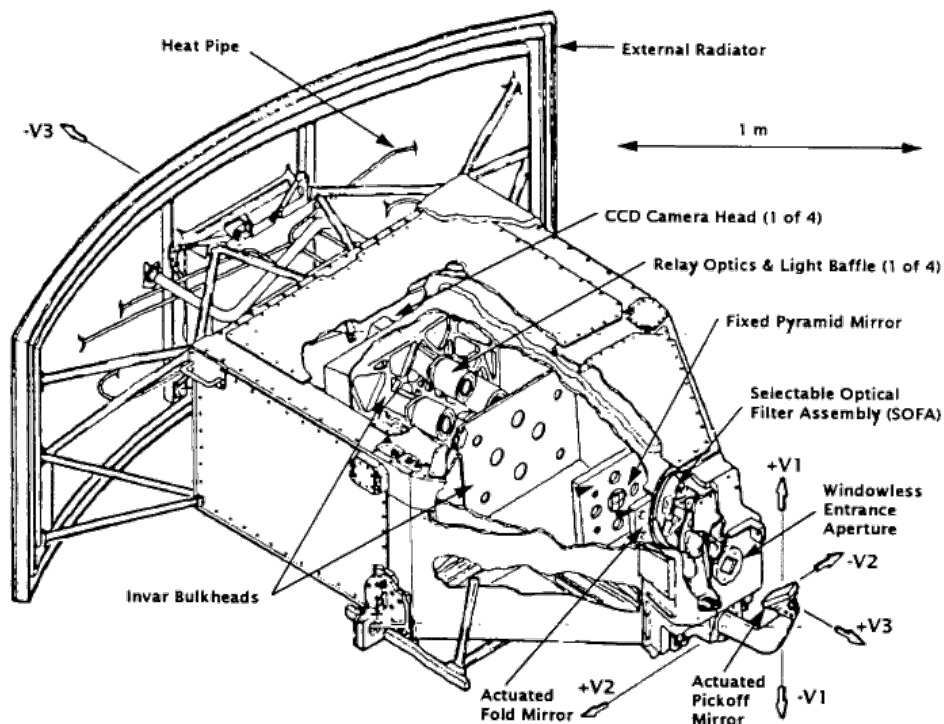


図 II.1-5 米国 NASA ハッブル宇宙望遠鏡に搭載された第 2 世代広視野惑星カメラ (WFPC2)^[II.5]

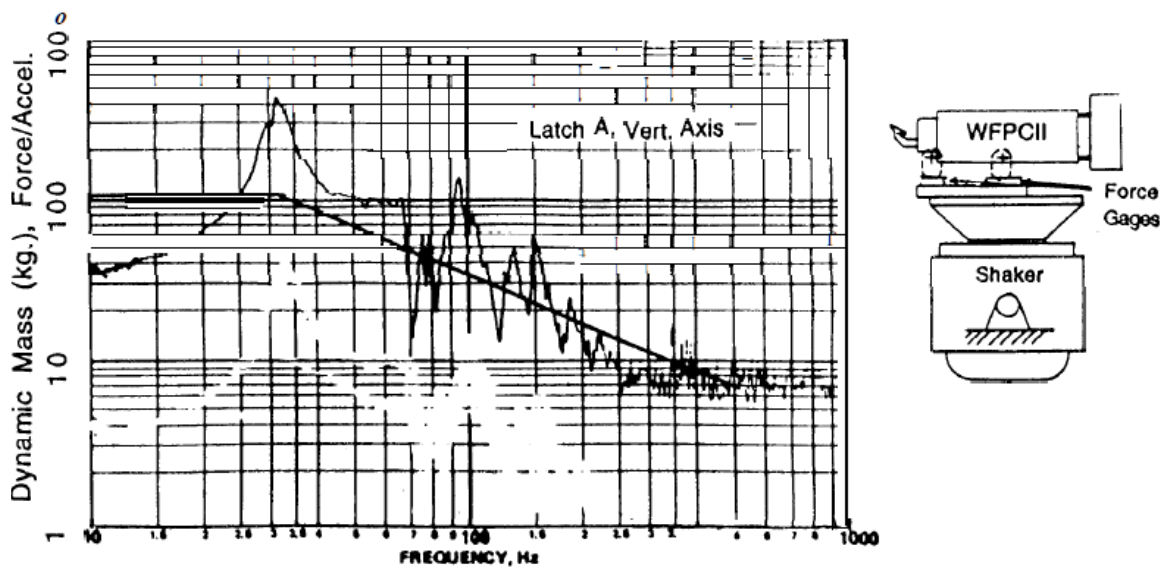


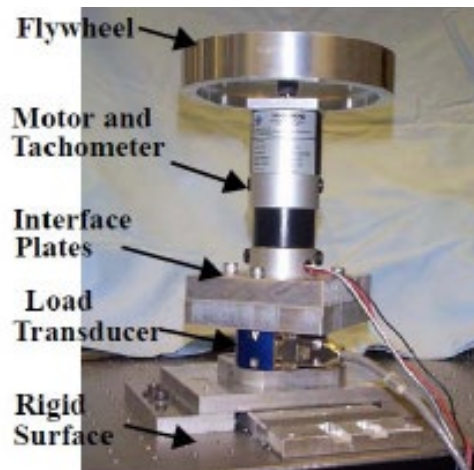
図 II.1-6 WFPC2 の動質量の測定値^[II.6]

Ⅱ.2 測定方法の例

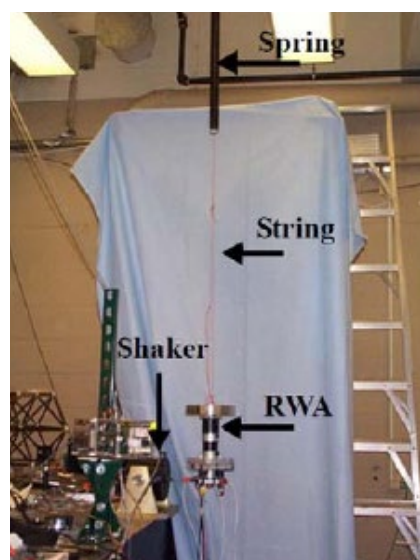
本節では 6 自由度の動質量の測定方法をいくつか紹介する。ただし、いずれの方法もまだ研究段階である。

Ⅱ.2.1 6 軸動力計内蔵バネ吊りテーブルによる方法

擾乱源の 6 自由度の動質量を測定した国内実績はないが、文献[Ⅱ.7][Ⅱ.8]には図Ⅱ.2.1-1のようなホイール相当の擾乱源の動質量を実験的に取得した例がある。この実験では、取り付けインタフェースとなる擾乱源に付属の 6 軸動力計の近傍に加速度計を 6 個配置し、擾乱源本体を図Ⅱ.2.1-2のようにバネで宙吊りしている。そして、取り付けインタフェースを加振器で加振することで、伝達関数を取得し、結果的に動質量を取得している。図Ⅱ.2.1-3には加振の様子と、加速度計の設置位置を示す。



図Ⅱ.2.1-1 ホイール相当の擾乱源[Ⅱ.7][Ⅱ.8]



図Ⅱ.2.1-2 動質量測定系セットアップ[Ⅱ.7][Ⅱ.8]

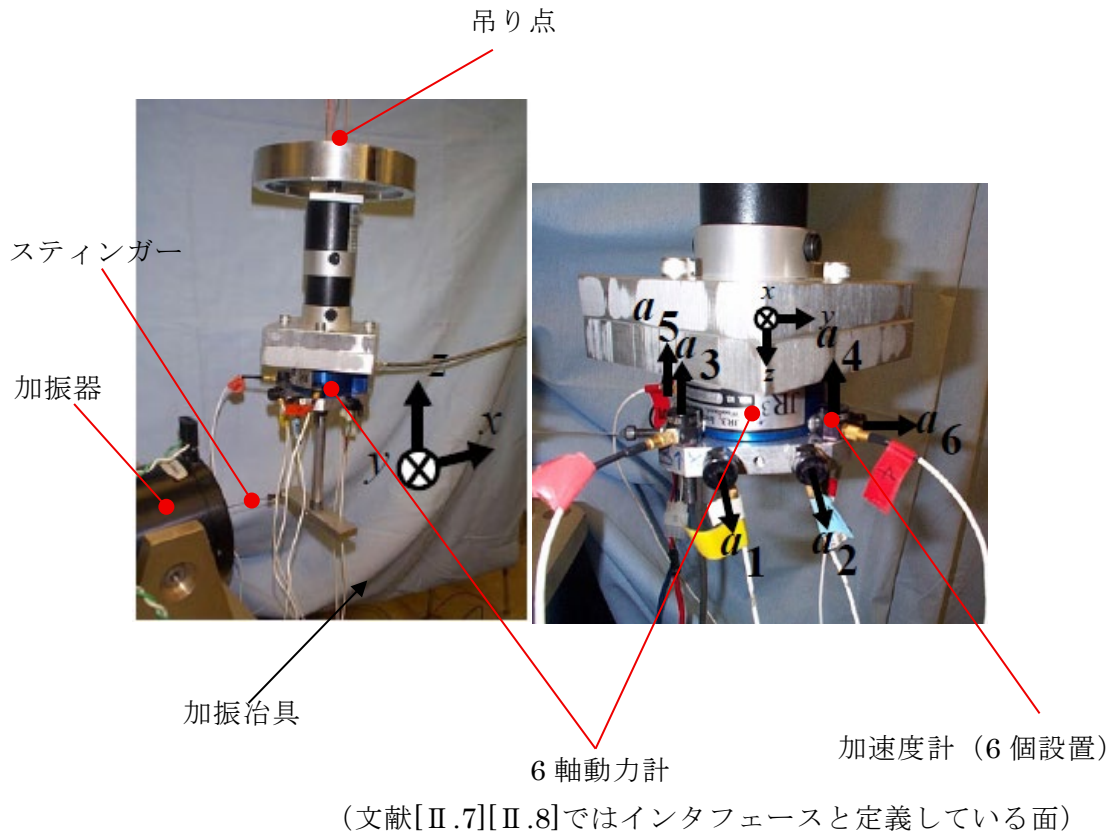


図 II.2.1-3 擾乱源の加振部と加速度計設置位置[II.7][II.8]

文献[II.7][II.8]で行われた方法は、擾乱源に6軸動力計が付属し、擾乱源本体が簡単に吊れる特殊な例である。そこで、これを参考に一般化した方法を以下に紹介する。上記では図II.2.1-2のように擾乱源本体を宙吊りしていたが、図II.2.1-4のような6軸動力計が内蔵されたバネ吊りテーブルを宙吊りして、動質量を測定する方法について考えてみよう。

まず、6軸動力計は試験台の代表点（図中では参照点 **R**）で校正されているとする。校正方法は付録 - IIIに記載する通りである。インパクトハンマーまたは加振器による加振の位置を剛なテーブル上で変えながら N 回実施したとする。すると、インパクトハンマーの加振入力 F_{hj} ($j=1, \dots, N$) と 6軸動力計の出力（フォース 6成分）から、次の伝達関数 L の行列の要素を得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} F_x(\omega) \\ F_y(\omega) \\ F_z(\omega) \\ T_x(\omega) \\ T_y(\omega) \\ T_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{L}(\omega) \begin{Bmatrix} F_{h1}(\omega) \\ F_{h2}(\omega) \\ \vdots \\ F_{hN}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.2.1-1})$$

なお、 ω は入力角振動数で、右下付き添え字 \mathbf{R} は試験台上の参照点 \mathbf{R} 基準であることを示している。同様に、試験台上の加速度計 M 個の出力 A_j ($j=1, \dots, M$) から、次の伝達関数行列の要素を得る。

$$\begin{Bmatrix} A_1(\omega) \\ A_2(\omega) \\ \vdots \\ A_M(\omega) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(\omega) \begin{Bmatrix} F_{h1}(\omega) \\ F_{h2}(\omega) \\ \vdots \\ F_{hN}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.2.1-2})$$

ここで、試験台上の参照点 \mathbf{R} に対する加速度 6 成分と加速度計の出力との関係は定数行列 \mathbf{T} を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} A_x(\omega) \\ A_y(\omega) \\ A_z(\omega) \\ RA_x(\omega) \\ RA_y(\omega) \\ RA_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} A_1(\omega) \\ A_2(\omega) \\ \vdots \\ A_M(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.2.1-3})$$

よって、式(II.2.1-1)(II.2.1-2)(II.2.1-3)より次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} F_x(\omega) \\ F_y(\omega) \\ F_z(\omega) \\ T_x(\omega) \\ T_y(\omega) \\ T_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{L}(\omega) \mathbf{H}^\#(\omega) \mathbf{T}^\# \begin{Bmatrix} A_x(\omega) \\ A_y(\omega) \\ A_z(\omega) \\ RA_x(\omega) \\ RA_y(\omega) \\ RA_z(\omega) \end{Bmatrix}_R \quad (\text{II.2.1-4})$$

ただし、 $\mathbf{H}^\#$, $\mathbf{T}^\#$ は次のように定義される一般化逆行列である。

$$\mathbf{H}^\#(\omega) \equiv \{\mathbf{H}^T(\omega)\mathbf{H}(\omega)\}^{-1}\mathbf{H}^T(\omega)$$

$$\mathbf{T}^\# \equiv (\mathbf{T}^T\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^T$$

つまり、式(II.2.1-4)より動質量は次式として得ることができる。

$${}^D\mathbf{M}(\omega) = \mathbf{L}(\omega) \mathbf{H}^\#(\omega) \mathbf{T}^\# \quad (\text{II.2.1-5})$$

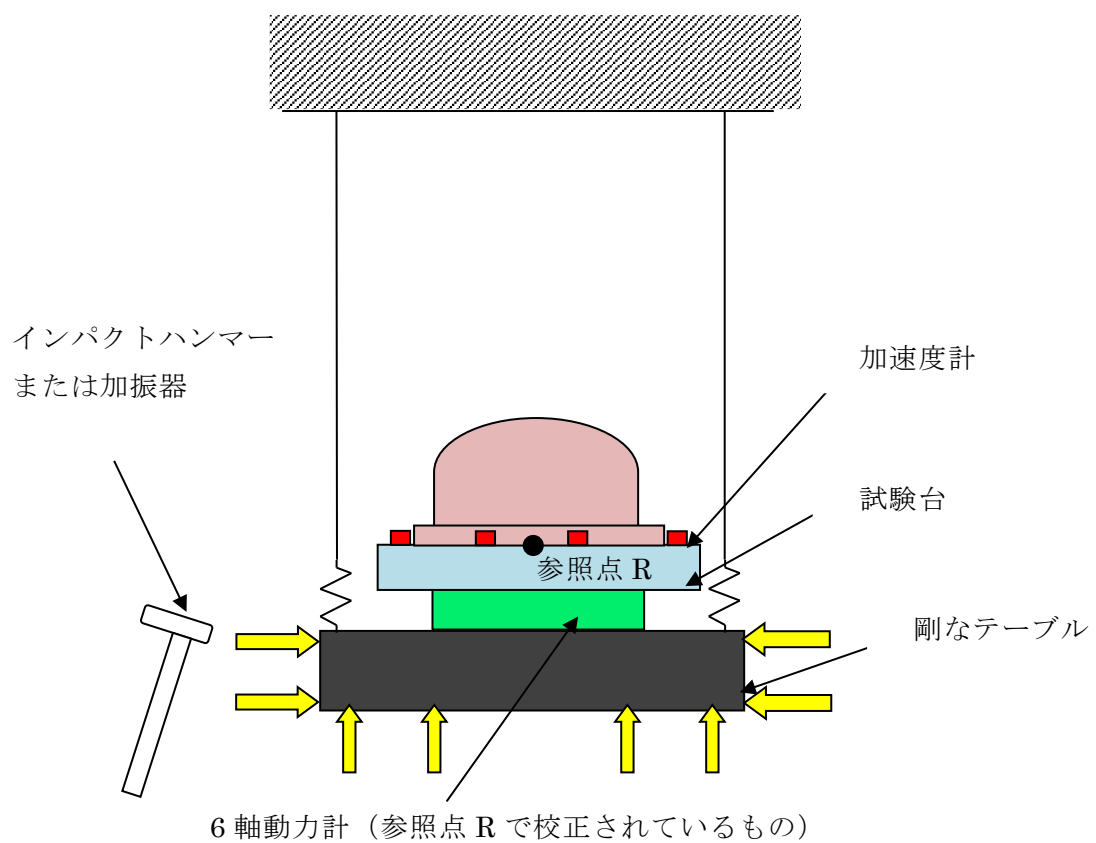


図 II.2.1-4 バネ吊りテーブル概略図

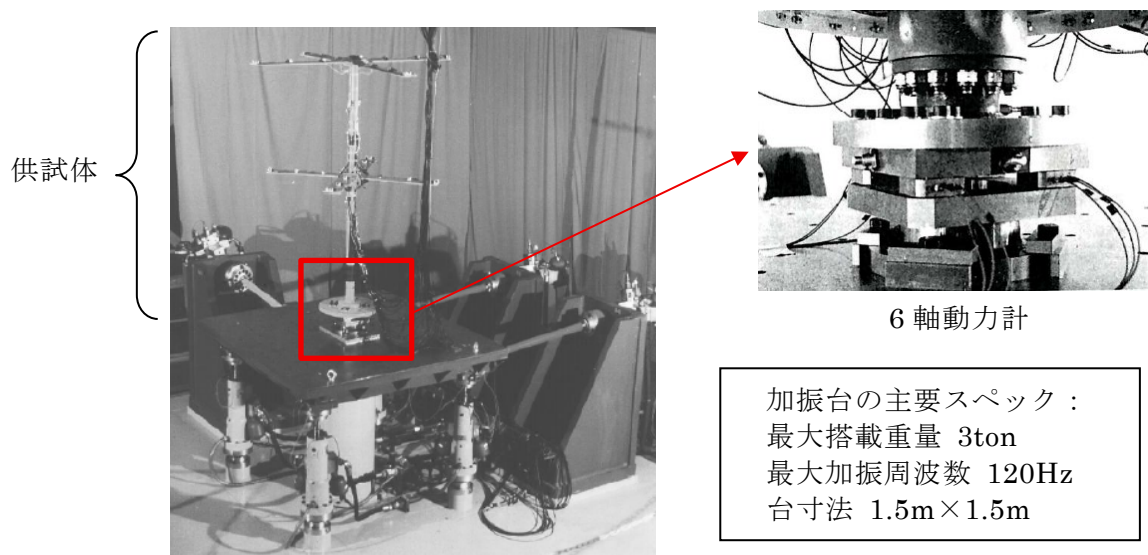
II.2.2 6軸動力計を設置した多軸加振台を用いる方法

本項では、図II.2.2-1のような6軸動力計を設置した多軸加振台による動質量の測定方法について紹介する。

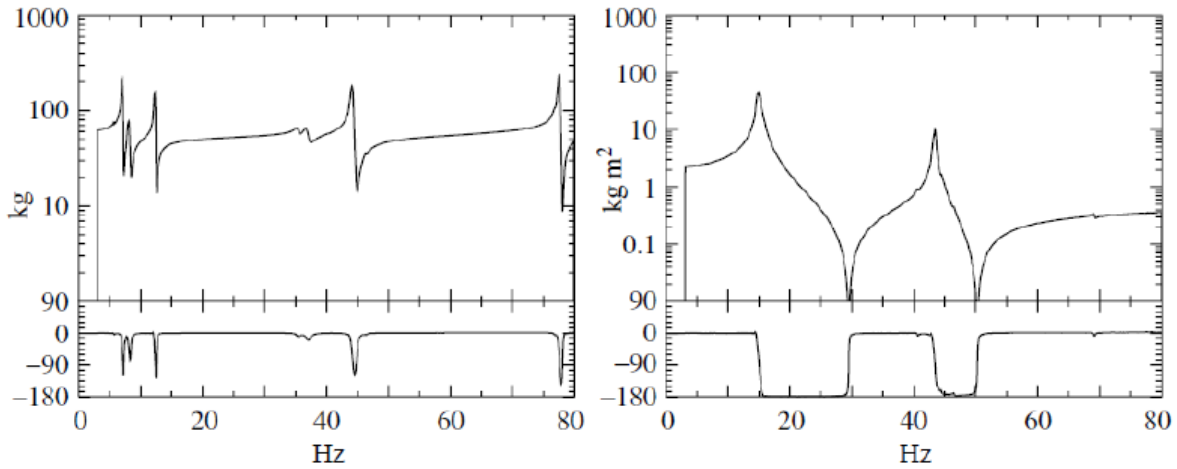
国内外ですでに行われている水平・垂直加振台を使ったフォースリミット振動試験の過程で、加振方向の並進1成分に対する動質量を取得することができる[II.6][II.9]。しかし、回転成分まで含めた6自由度の動質量の取得には回転加振まで必要となる。

国内では実績は無いが、回転加振まで可能な3軸6自由度の加振装置と6軸動力計を組み合わせ、構造物の動質量を測る方法がある。ただし、海外でもまだ研究段階であり、その研究の主目的は動質量の測定値を用いた静質量（重心位置、慣性モーメント等）の同定である。多軸加振台を用いた動質量測定の代表的な研究例のとして文献[II.10][II.11]を挙げる。

多軸加振台は国内外多数現存するが、加振周波数は一般的に100Hz以下で、それ以上のものは極めてまれである[II.12][II.13]。図II.2.2-1の多軸加振台を使った動質量測定の一例を図II.2.2-2に示す。



図II.2.2-1 ドイツ航空宇宙センター(DLR) ゲッチンゲン・空力弾性研究所保有の多軸加振台 [II.13][II.14]



図Ⅱ.2.2-2 動質量の測定値の一例
 (動質量の 6×6 行列の要素のうち 2 つを例として記載) [II.10][II.11]

Ⅱ.2.3 ハンマリングによる方法

図Ⅱ.2.3-1 のようにバネやゴム紐を使って簡単に擾乱源を宙吊りにできるようにすれば、以下に述べる動質量の測定方法が考えられる。この方法では、擾乱源の取り付け点(締結位置)に質点と見なせるくらいの寸法の剛なブロックを取り付け、そのブロック越しに 3 軸(X、Y、Z)各々加振して動質量を求める。ブロックの質量が擾乱源に比べて無視できない場合には付加質量の補正が必要なる。

Ⅱ.2.3.1 付加質量の補正

まず、加振時のフォースと加速度の関係を求めよう。

図 I.1-1 において、分系 2 がインパクトハンマーや加振器などで振動入力を加えるブロックで、分系 1 を測定対象物の擾乱源と見なす。このときは、点②と点③の結合点で外力が作用せず、点④に外力(加振力)が作用する。そして、点①は加振点以外の擾乱源の締結点とすると、この点は自由端なので、

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_e \end{Bmatrix} = O$$

である。上付き添え字 D は擾乱源、 B はブロックをそれぞれ表すものとして以下考える。

まず、式(I.1-9)(I.1-10)より結合点② (=点③) での加速度応答は次のようになる。

$$A_1 = {}^D G A_2 \tag{Ⅱ.2.3-1}$$

$$A_2 = ({}^D M + {}^B M)^{-1} {}^B M {}^B H_{34} {}^B F_4 \tag{Ⅱ.2.3-2}$$

ただし、この場合は

$$\begin{aligned} {}^D\mathbf{M} &\equiv {}^D\mathbf{H}_{22}^{-1} \\ {}^B\mathbf{M} &\equiv {}^B\mathbf{H}_{33}^{-1} \\ {}^D\mathbf{G} &\equiv {}^D\mathbf{H}_{12} {}^D\mathbf{M} \end{aligned}$$

と定義している。ブロック(分系 2)が質点と見なせる場合は近似的に

$${}^B\mathbf{H}_{33} \approx {}^B\mathbf{H}_{34}$$

が成り立つので、式(II.2.3-2)は次のように表すことができる。

$$\mathbf{A}_2 \approx ({}^D\mathbf{M} + {}^B\mathbf{M})^{-1} {}^B\mathbf{M} {}^B\mathbf{H}_{33} {}^B\mathbf{F}_4 = ({}^D\mathbf{M} + {}^B\mathbf{M})^{-1} {}^B\mathbf{F}_4 \quad (\text{II.2.3-3})$$

そして、ブロックの動質量 ${}^B\mathbf{M}$ は式(II.1-39)より、次のような定数行列となる。

$${}^B\mathbf{M} = {}^Bm \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.3-4})$$

ただし、ハンマリングなどでは回転の加振ができないので、ここでは回転成分は考慮せず、並進 3 成分だけで考えると、ブロックの動質量は

$${}^B\mathbf{M} = {}^Bm\mathbf{E}_3 \quad (\text{II.2.3-5})$$

となる。よって、式(II.2.3-3)(II.2.3-5)より擾乱源とブロック取り付け点での加速度 \mathbf{A}_2 は近似的に次のように表すことができる。

$$\mathbf{A}_2 \approx ({}^D\mathbf{M} + {}^Bm\mathbf{E}_3)^{-1} {}^B\mathbf{F}_4 \quad (\text{II.2.3-6})$$

次に、ハンマリングなどの加振実験で以下の伝達関数 ${}^{DB}\mathbf{H}_{14}$, ${}^{DB}\mathbf{H}_{24}$ が得られたとする。

$$\mathbf{A}_1 = {}^{DB}\mathbf{H}_{14} {}^B\mathbf{F}_4 \quad (\text{II.2.3-7})$$

$$\mathbf{A}_2 = {}^{DB}\mathbf{H}_{24} {}^B\mathbf{F}_4 \quad (\text{II.2.3-8})$$

すると、式(II.2.3-1)(II.2.3-7)(II.2.3-8)より

$${}^D\mathbf{G} = {}^{DB}\mathbf{H}_{14} {}^{DB}\mathbf{H}_{24}^{-1} \quad (\text{II.2.3-9})$$

であり、さらに式(II.2.3-6)(II.2.3-8)より

$${}^D\mathbf{M} = {}^{DB}\mathbf{H}_{24}^{-1} - {}^Bm\mathbf{E}_3 \quad (\text{II.2.3-10})$$

が得られる。よって、ブロックの質量 Bm の影響を取り除いた伝達関数を用いた加振入力フォースと加速度の関係は次のようである。

$$\mathbf{A}_1 = {}^D\mathbf{G} {}^D\mathbf{M}^{-1} {}^B\mathbf{F}_4 \quad (\text{II.2.3-11})$$

$$\mathbf{A}_2 = {}^D\mathbf{M}^{-1} {}^B\mathbf{F}_4 \quad (\text{II.2.3-12})$$

II.2.3.2 補正された動質量

擾乱源の取り付け点の*i*番目の加振点と同一位置での加速度をそれぞれ $\hat{\mathbf{F}}_i, \hat{\mathbf{A}}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ とする。すると、図II.2.3-1のように取り付け面のある参照点Rで換算したフォース6成分 ${}^D\hat{\mathbf{F}}$ と加速度6成分 ${}^D\hat{\mathbf{A}}$ はそれぞれ次のような関係を有する。

$${}^D\hat{\mathbf{F}}(\omega) \equiv \left\{ \begin{array}{c} F_x(\omega) \\ F_y(\omega) \\ F_z(\omega) \\ T_x(\omega) \\ T_y(\omega) \\ T_z(\omega) \end{array} \right\}_R = \mathbf{S} \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{F}}_1(\omega) \\ \hat{\mathbf{F}}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_N(\omega) \end{array} \right\} \quad (\text{II.2.3-13})$$

$${}^D\hat{\mathbf{A}}(\omega) \equiv \left\{ \begin{array}{c} A_x(\omega) \\ A_y(\omega) \\ A_z(\omega) \\ RA_x(\omega) \\ RA_y(\omega) \\ RA_z(\omega) \end{array} \right\}_R = \mathbf{T} \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{A}}_1(\omega) \\ \hat{\mathbf{A}}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_N(\omega) \end{array} \right\} \quad (\text{II.2.3-14})$$

ここで、右下付き添え字Rは参照点R基準であることを示している。また、 \mathbf{S}, \mathbf{T} は加振点の位置とセンサの配置によって決まる定数の行列である。次に、図II.2.3-1のような*i*番目の加振点に対する擾乱源上の*k*番目の取り付け点の加速度(並進3成分)の関係は次のようである。

$$\hat{\mathbf{A}}_k(\omega) = \mathbf{H}_{ki}(\omega)\hat{\mathbf{F}}_i(\omega) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{II.2.3-15})$$

上式中の 3×3 の伝達関数行列 \mathbf{H}_{ki} には前述のブロックの質量の影響が混入している。そこで、前述の補正の考え方を使って、*i*番目の加振点の加速度に対する擾乱源上の*k*番目の取り付け点の加速度の伝達関数をまずは求めると、次のようである。

$$\mathbf{G}_{ki}(\omega) = \mathbf{H}_{ki}(\omega)\mathbf{H}_{ii}^{-1}(\omega) \quad (\text{II.2.3-16})$$

次に、*i*番目の加振点における動質量からブロック質量 Bm_i を差し引いて補正した加振点での動質量を次のように表す。

$$\mathbf{M}_i(\omega) = \mathbf{H}_{ii}^{-1}(\omega) - {}^B\mathbf{M}_i = \mathbf{H}_{ii}^{-1}(\omega) - {}^Bm_i\mathbf{E}_3 \quad (\text{II.2.3-17})$$

すると、治具ブロックの質量の影響を排除したときの、*i*番目の加振点に対する擾乱源上の*k*($k = 1, 2, \dots, N$)番目の取り付け点の加速度の関係は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{A}}_1(\omega) \\ \hat{\mathbf{A}}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_i(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_N(\omega) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_{1i}(\omega) \\ \mathbf{G}_{2i}(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{Ni} \end{array} \right] \mathbf{M}_i^{-1}(\omega)\hat{\mathbf{F}}_i(\omega) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_{1i}(\omega)\mathbf{M}_i^{-1}(\omega) \\ \mathbf{G}_{2i}(\omega)\mathbf{M}_i^{-1}(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{M}_i^{-1}(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{Ni}\mathbf{M}_i^{-1}(\omega) \end{array} \right] \hat{\mathbf{F}}_i(\omega) \quad (\text{II.2.3-18})$$

さらにブロックを(i+1)番目の加振点に移し、同様な加振を全ての加振点について順次行っていくと、最終的には次の伝達関数 \hat{H} を得ることになる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{A}_1(\omega) \\ \hat{A}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{A}_i(\omega) \\ \vdots \\ \hat{A}_N(\omega) \end{Bmatrix} = \hat{H}(\omega) \begin{Bmatrix} \hat{F}_1(\omega) \\ \hat{F}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{F}_i(\omega) \\ \vdots \\ \hat{F}_N(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.2.3-19})$$

ここで、

$$\hat{H}(\omega) = \begin{bmatrix} M_1^{-1}(\omega) & G_{12}(\omega)M_2^{-1}(\omega) & \cdots & G_{1i}(\omega)M_i^{-1}(\omega) & \cdots & G_{1N}(\omega)M_N^{-1}(\omega) \\ G_{21}(\omega)M_1^{-1}(\omega) & M_2^{-1}(\omega) & & G_{2i}(\omega)M_i^{-1}(\omega) & & G_{2N}(\omega)M_N^{-1}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ G_{i1}(\omega)M_1^{-1}(\omega) & G_{i2}(\omega)M_2^{-1}(\omega) & & M_i^{-1}(\omega) & & G_{iN}(\omega)M_N^{-1}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1}(\omega)M_1^{-1}(\omega) & G_{N2}(\omega)M_2^{-1}(\omega) & \cdots & G_{Ni}(\omega)M_i^{-1}(\omega) & & M_N^{-1}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.3-20})$$

よって、式(II.2.3-13)(II.2.3-14)(II.2.3-19)より

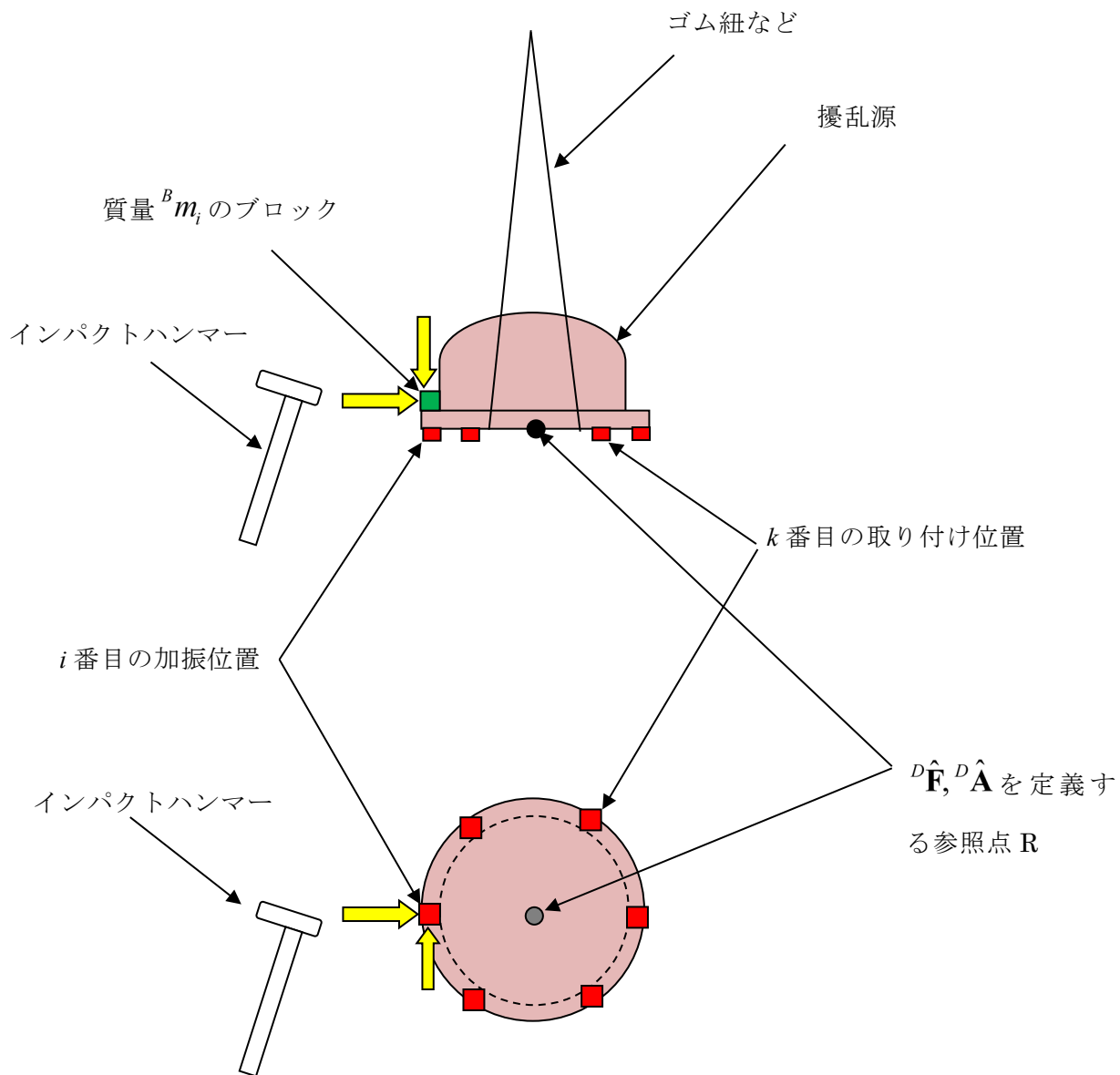
$${}^D\hat{F}(\omega) = S\hat{H}^{-1}(\omega)T^\#{}^D\hat{A}(\omega) \quad (\text{II.2.3-21})$$

である。ただし、 $T^\#$ は次のように定義される一般化逆行列である。

$$T^\# \equiv (T^T T)^{-1} T^T$$

したがって、式(II.2.3-21)よりブロックの質量の影響がない本来求めたい動質量は次式として得ることができる。

$${}^D M(\omega) = S\hat{H}^{-1}(\omega)T^\# \quad (\text{II.2.3-22})$$



ブロックは加振位置毎に取り付ける（加振位置全てにブロックを同時に取り付けない）。
 ■は加速度計（3軸）設置位置を表し、感度の軸は加振方向(3軸)と合わせる。

図 II.2.3-1 ハンマリングによる動質量測定の一例

付録ー II 参考文献

- [II.1] 姿勢制御研究委員会編，人工衛星の力学と制御ハンドブック，培風館，2007年，4章 人工衛星の姿勢と力学

- [II .2] 木田 隆著, スペースクラフトの制御, コロナ社, 1999 年, 5 章 大型衛星
- [II .3] 小松 敬治著, 機械構造振動学 MATLAB による有限要素法と応用解析, 森北出版, 2009 年, 9.3 節有効モード質量
- [II .4] 施 勤忠, 安藤 成将, 動質量の周波数平均値を用いた人工衛星構体パネル上搭載機器の音響振動解析, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.73, No.730, pp.1684-1690 2007
- [II .5] Space Telescope Science Institute, Wide Field and Planetary Camera 2 Instrument Handbook, ver.10.0, Aug 2008.
- [II .6] Scharton, T. D., “Force Limits for Vibration Tests” , Proceedings of Spacecraft Structures and Mechanical Testing Conference, Paris, June 1994.
- [II .7] Elias, L. M., “A Structurally Coupled Disturbance Analysis Method Using Dynamic Mass Measurement Techniques with Application to Spacecraft-Reaction Wheel Systems” , Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, March 2001.
- [II .8] Elias, L. M. and Miller, D. W., “A Coupled Disturbance Analysis Method Using Dynamic Mass Measurement Techniques” , Proceedings of the 43d Annual AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 2002, AIAA Paper 2002-1252.
- [II .9] JERG-2-130-HB004C, フォースリミット振動試験ハンドブック, 2017
- [II .10] Füllekrug, U., “Utilization of Multi-Axial Shaking Tables for the Modal Identification of Structures” , Philosophical Transaction of Royal Society, Vol.359, No.1786, pp.1753-1770, 2001.
- [II .11] Füllekrug, U., and Schedlinski, C., “Inertia Parameter Identification from Base Excitation Test Dat” , Proceedings of the 5th International Symposium on Environmental Testing for Space Programmes, Noordwijk, The Netherlands (ESA SP-558, June 2004). pp.223-232.
- [II .12] 長松 昭男他編, ダイナミクスハンドブック(第 2 版), 朝倉書店 1997 年, 12.2 加振装置
- [II .13] Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V., Institute für Aeroelastik, Mehrachsen-Vibrationssimulator MAVIS Göttingen リーフレット
- [II .14] Füllekrug, U., and Sinapius, M., “Identification of modal parameters, generalized and effective masses during base-driven tests”, Aerospace Science and Technology, 1998, no.7, pp.469-480.

付録－Ⅲ 6 軸動力計を使った測定方法の補足

Ⅲ.1 測定値の補正方法

本節では、供試体に取り付け治具を介して固定された 6 軸動力計が、測定対象の周波数帯域で準静的状態を仮定できない場合の測定値の補正方法について補足する。

図 I.1-1 において、分系 1 をキスラーテーブルのような 6 軸動力計（取り付け治具を含む）と見なし、分系 2 を擾乱源と見なす。このとき、点①で無限の質量（実際は有限な質量の除振台など）に剛で結合されているものと仮定する。そのときの反力が 6 軸動力計の測定値となる。以降、左上付き添え字 P は 6 軸動力計を表すものとし、左上付き添え字 D は測定対象物の擾乱源を表すものとする。

まず、点②がテーブル上に設置された固定治具の上面で、点③が擾乱源の取り付け点、点④が擾乱源内部のフォースの作用点とする。このときは、テーブルの固定点（点①）で加速度が零、つまり、

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{O}$$

であるので、式(I.1-9)より

$$\begin{aligned} & \{ {}^P\mathbf{H}_{11} - {}^P\mathbf{H}_{12}({}^P\mathbf{H}_{22} + {}^D\mathbf{H}_{33})^{-1}{}^P\mathbf{H}_{21} \} \mathbf{F}_1 \\ & \quad + {}^P\mathbf{H}_{12}({}^P\mathbf{H}_{22} + {}^D\mathbf{H}_{33})^{-1}{}^D\mathbf{H}_{33}\mathbf{F}_e \\ & \quad + {}^P\mathbf{H}_{12}({}^P\mathbf{H}_{22} + {}^D\mathbf{H}_{33})^{-1}{}^D\mathbf{H}_{34}{}^D\mathbf{F}_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{Ⅲ.1-1})$$

である。結合点②（＝点③）で外力が作用しないで、擾乱源を駆動した時の 6 軸動力計の測定値 \mathbf{F}_1 は、式(Ⅲ.1-1)において

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{O}$$

とすることで、結果的に次のような形で得ることができる。

$$\mathbf{F}_1 = \{ {}^P\mathbf{H}_{21} - ({}^P\mathbf{H}_{22} + {}^D\mathbf{H}_{33}){}^P\mathbf{H}_{12}^{-1}{}^P\mathbf{H}_{11} \}^{-1}{}^D\mathbf{H}_{34}{}^D\mathbf{F}_4 \quad (\text{Ⅲ.1-2})$$

一方で、擾乱源を取り付けたままで駆動しないで、結合点②（＝点③）で外力 \mathbf{F}_e を作用させた場合には、式(Ⅲ.1-1)において

$${}^D\mathbf{F}_4 = \mathbf{O}$$

とすることで、次の関係式を得る。

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{Q}\mathbf{F}_1 \quad (\text{Ⅲ.1-3})$$

ここで、 \mathbf{Q} は次のように定義されている。

$$\mathbf{Q} \equiv {}^D\mathbf{H}_{33}^{-1} \{ {}^P\mathbf{H}_{21} - ({}^P\mathbf{H}_{22} + {}^D\mathbf{H}_{33}){}^P\mathbf{H}_{12}^{-1}{}^P\mathbf{H}_{11} \} \quad (\text{Ⅲ.1-4})$$

すると式(I.2-1)(I.2-2)(Ⅲ.1-2)(Ⅲ.1-4)より、6 軸動力計の測定値 \mathbf{F}_1 と擾乱力 ${}^D\mathbf{W}$ の関係を次式として得ることができる。

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}^{-1}{}^D\mathbf{M}{}^D\mathbf{H}_{34}{}^D\mathbf{F}_4 = \mathbf{Q}^{-1}{}^D\mathbf{W} \quad (\text{Ⅲ.1-5})$$

よって、

$${}^D\mathbf{W} = \mathbf{Q}\mathbf{F}_1 \quad (\text{III.1-6})$$

であるので、6 軸動力計の測定値 \mathbf{F}_1 に \mathbf{Q} をかければ、擾乱力 ${}^D\mathbf{W}$ を得ることができる。

III.2 簡易校正法

6 軸動力計を自作した場合の簡易的な校正方法について紹介する。具体例等は文献 [III.1]に記載されている。

図III.2-1 のように参照点として点 P を定義し、質量特性が既知の剛なマスが搭載されているとすると、参照点 R でのフォース 6 成分と加速度 6 成分の関係として次式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} F_x(\omega) \\ F_y(\omega) \\ F_z(\omega) \\ T_x(\omega) \\ T_y(\omega) \\ T_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{M}_S \begin{Bmatrix} A_x(\omega) \\ A_y(\omega) \\ A_z(\omega) \\ RA_x(\omega) \\ RA_y(\omega) \\ RA_z(\omega) \end{Bmatrix}_R \quad (\text{III.2-1})$$

ここで、右下付き添え字 R は参照点 R 基準であることを示し、静質量 \mathbf{M}_S は参照点 R 基準で次のような定数行列である [III. 1]。

$$\mathbf{M}_S \equiv \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mZ_{CG} & -mY_{CG} \\ 0 & m & 0 & -mZ_{CG} & 0 & mX_{CG} \\ 0 & 0 & m & mY_{CG} & -mX_{CG} & 0 \\ 0 & -mZ_{CG} & mY_{CG} & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mZ_{CG} & 0 & -mX_{CG} & -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -mY_{CG} & mX_{CG} & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2-2})$$

この静質量 \mathbf{M}_S は事前に解析等で既知とする。校正によって求めたいものは 6 軸動力計としての電圧出力値と物理量（フォース 6 成分）の関係で、それは次の感度行列 \mathbf{S} を求めることに等しい。

$$\begin{Bmatrix} F_x(\omega) \\ F_y(\omega) \\ F_z(\omega) \\ T_x(\omega) \\ T_y(\omega) \\ T_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{S}(\omega) \begin{Bmatrix} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \\ V_3(\omega) \\ V_4(\omega) \\ V_5(\omega) \\ V_6(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2-3})$$

ただし、通常は 3 成分フォースセンサを L 個（3 個以上）設置して 1 つの 6 軸動力計を構成しているので、それらの電圧出力 $V_j(j=1,2,\dots,3L)$ との関係を考慮すると、一般的には次のような感度行列 \mathbf{S} を定義することになる。

$$\begin{Bmatrix} F_x(\omega) \\ F_y(\omega) \\ F_z(\omega) \\ T_x(\omega) \\ T_y(\omega) \\ T_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{S}(\omega) \begin{Bmatrix} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \\ V_3(\omega) \\ V_4(\omega) \\ \vdots \\ V_{3L}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2-4})$$

次に、図III.2-1のように N 個の加速度計を質量特性が既知のマスに設置すると、加速度計の位置関係から次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} A_x(\omega) \\ A_y(\omega) \\ A_z(\omega) \\ RA_x(\omega) \\ RA_y(\omega) \\ RA_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{U} \begin{Bmatrix} A_1(\omega) \\ A_2(\omega) \\ A_3(\omega) \\ \vdots \\ A_N(\omega) \end{Bmatrix}_R \quad (\text{III.2-5})$$

ここで、行列 \mathbf{U} は加速度計の幾何学的位置関係から決定する定数行列である。そして、図III.2-1のように6軸動力計の下からインパクトハンマーや加振器などで加振位置を M 回変更してすると、以下の伝達関数 \mathbf{R} , \mathbf{H} を得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \\ V_3(\omega) \\ V_4(\omega) \\ \vdots \\ V_{3L}(\omega) \end{Bmatrix} = \mathbf{R}(\omega) \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ \vdots \\ F_M(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2-6})$$

$$\begin{Bmatrix} A_1(\omega) \\ A_2(\omega) \\ A_3(\omega) \\ \vdots \\ A_N(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{H}(\omega) \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ \vdots \\ F_M(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2-7})$$

したがって、式(III.2-5)(III.2-6)(III.2-7)より、加速度6成分と L 個の3成分フォースセンサの電圧出力値の関係を次式として表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} A_x(\omega) \\ A_y(\omega) \\ A_z(\omega) \\ RA_x(\omega) \\ RA_y(\omega) \\ RA_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{UH}(\omega)\mathbf{R}^\#(\omega) \begin{Bmatrix} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \\ V_3(\omega) \\ V_4(\omega) \\ \vdots \\ V_{3L}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2-8})$$

ただし、 $\mathbf{R}^\#$ は以下に定義する一般化逆行列である。

$$\mathbf{R}^\#(\omega) \equiv \{\mathbf{R}^T(\omega)\mathbf{R}(\omega)\}^{-1}\mathbf{R}^T(\omega)$$

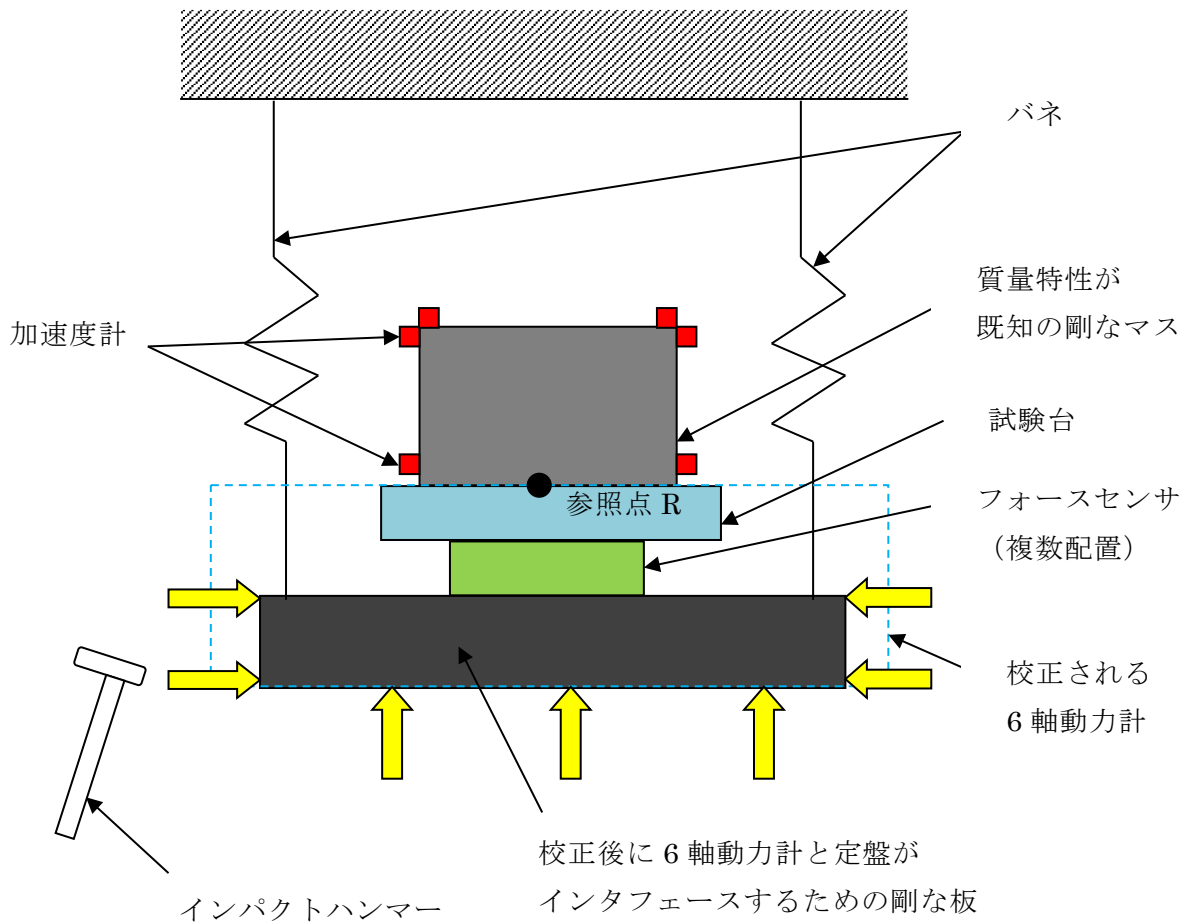
よって、式(Ⅲ.2-8)を(Ⅲ.2-1)に代入すると、

$$\begin{Bmatrix} F_x(\omega) \\ F_y(\omega) \\ F_z(\omega) \\ T_x(\omega) \\ T_y(\omega) \\ T_z(\omega) \end{Bmatrix}_R = \mathbf{M}_S \mathbf{U} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{R}^\#(\omega) \begin{Bmatrix} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \\ V_3(\omega) \\ V_4(\omega) \\ \vdots \\ V_{3L}(\omega) \end{Bmatrix}$$

となるので、式(Ⅲ.2-3)と比較して感度行列 \mathbf{S} を次式として得ることができた。

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{M}_S \mathbf{U} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{R}^\#(\omega)$$

これは伝達関数であるため周波数に依存するものとなる。一般的に加速度計の数と加振回数は多い方が精度は上がる。



図Ⅲ.2-1 測定時のコンフィグレーション

付録－Ⅲ 参考文献

- [Ⅲ.1] Witter, M. C., Brown, D. L., and Blough, J. R. , ” Measuring the Six dof Driving Point Impedance Function and AN Application to RB Inertia Property Estimation”, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.14, No.1, January 2000, pp. 111-124(14).

付録－Ⅳ バネ吊りテーブルを使った測定方法の補足

本付録では、図 4.2.2.1-1 のバネ吊りテーブルのような境界自由条件が実現できる装置を使って計測した加速度から、剛固定時の擾乱源が発生する荷重を理論的に見積もる方法を紹介する。

図 I.1-1 において、分系 1 を境界が自由条件下におけるバネ吊りテーブルの試験台と見なし、分系 2 を測定対象物の擾乱源と見なす。このときは、点②と点③の結合点で外力が作用せず、点①が自由端であるので、

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_e \end{Bmatrix} = \mathbf{O}$$

である。左上付き添え字 T はバネ吊りテーブルの試験台を表すものとし、試験台の点②における駆動点動質量を次のように定義する。

$${}^T\mathbf{M} \equiv {}^T\mathbf{H}_{22}^{-1} \quad (\text{IV-1})$$

すると、式(I.1-10)(I.2-1)(I.2-2)(IV-1)より結合点② (=点③) での加速度応答は次のようになる。

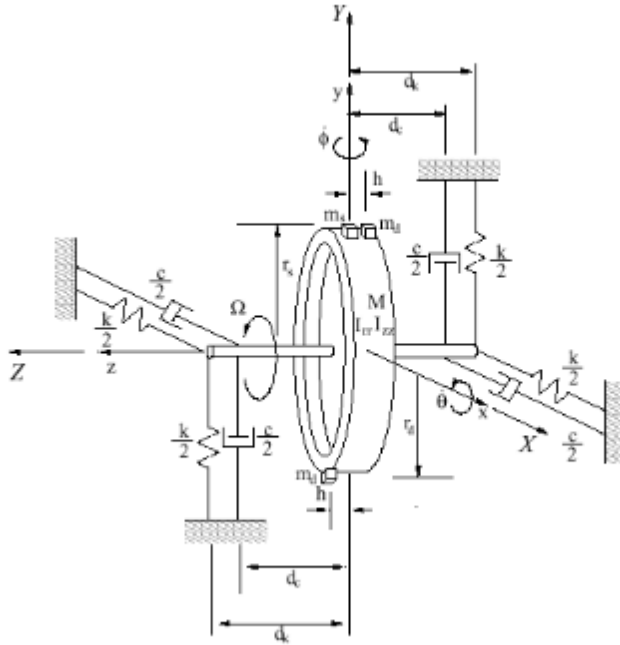
$$\mathbf{A}_2 = ({}^T\mathbf{M} + {}^D\mathbf{M})^{-1} {}^D\mathbf{M} {}^D\mathbf{H}_{34} {}^D\mathbf{F}_4 = ({}^T\mathbf{M} + {}^D\mathbf{M})^{-1} {}^D\mathbf{W} \quad (\text{IV-2})$$

\mathbf{A}_2 は装置に設置した加速度計で計測することができる。よって、式(IV-2)より擾乱源の剛固定条件でのフォース ${}^D\mathbf{W}$ が次式から得ることができる。

$${}^D\mathbf{W} = ({}^T\mathbf{M} + {}^D\mathbf{M})\mathbf{A}_2$$

付録-V ホイール擾乱 力学モデルの補足

動的、静的不釣り合いがある場合の構造共振を含むホイールの力学モデルを図 V-1 に示す。



- M : ロータ質量
- m_s : 静不釣り合い質量
- m_d : 動不釣り合い質量
- r_s : 静不釣り合い質量の半径方向位置
- r_d : 動不釣り合い質量の半径方向位置
- h : 動不釣り合い質量の軸方向位置
- k : バネ剛性
- c : ダンピング係数
- d_k : ホイール質量中心からバネまでの距離
- d_c : ホイール質量中心からダッシュポットまでの距離
- θ : X 軸周りの回転角
- ϕ : Y 軸周りの回転角
- x : x 軸周りの変位
- y : y 軸周りの変位

図 V-1 不釣り合いのあるホイールの力学モデル [V-1]

図 V-1 のモデルで発生する擾乱は、ホイールの構造特性及び動的、静的不釣り合いがわかれば解析的に派生する擾乱を知ることができる。

図 V-1 のモデルで静的な不釣り合いに対する運動方程式を以下に示す。

$$\begin{bmatrix} M_t & 0 \\ 0 & M_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = U_s \Omega^2 \begin{Bmatrix} -\sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{Bmatrix} (\omega) \quad (V-1)$$

ここで、

- U_s : 静的不釣り合い量 ($m_s r_s$)
- M : ロータ質量
- m_s : 静不釣り合い質量
- m_d : 動不釣り合い質量
- M_t : ロータの全質量 (ロータ質量 $M + m_s + m_d$)
- Ω : 回転数
- c : ダンピング係数
- x : x 軸周りの変位
- y : y 軸周りの変位

回転と構造の共振は、

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{M_t}} \quad (\text{V-2})$$

で発生する。

解析モデル・回転運動方程式及び回転擾乱

動的不釣り合いに関する回転の運動方程式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_\theta & \frac{1}{2}\bar{I}\sin(2\Omega t) \\ \frac{1}{2}\bar{I}\sin(2\Omega t) & I_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} \\ & + \Omega \begin{bmatrix} \frac{c_\theta}{\Omega} - \bar{I}\sin(2\Omega t) & I_{zz} + 2\bar{I}\cos^2(2\Omega t) \\ -I_{zz} - 2\bar{I}\cos^2(2\Omega t) & \frac{c_\theta}{\Omega} + \bar{I}\sin(2\Omega t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_\theta & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = U_d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V-3})$$

$$I_\theta = I_{rr} + 2m_d h^2 + \bar{I} \cos^2(\Omega t)$$

$$I_\varphi = I_{rr} + 2m_d h^2 + \bar{I} \sin^2(\Omega t)$$

$$\bar{I} = 2m_d r_d^2 + m_s r_s^2 \quad (\text{V-4})$$

ここで、

- U_d : 動的不釣り合い量 ($m_d r_d h$)
- I_{zz} : 回転軸周りの慣性能率
- I_{rr} : 回転軸と直交する軸周りの慣性能率
- m_s : 静不釣り合い質量
- Ω : 回転数
- c_θ : 回転のダンピング係数
- φ : X 軸周りの回転角
- θ : Y 軸周りの回転角
- m_d : 動不釣り合い質量
- r_s : 静不釣り合い質量の半径方向位置
- r_d : 動不釣り合い質量の半径方向位置
- h : 動不釣り合い質量の軸方向位置

ロッキングモードに対しては(V-3) (V-4)式を単純化し ($m_s = m_d = 0$)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{rr} & 0 \\ 0 & I_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & I_{zz} \\ -I_{zz} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\theta} & 0 \\ 0 & k_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} \\ = F \begin{Bmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{V-5}$$

ここで、

- F : $U_d \Omega^2$
- k_{θ} : 回転方向バネ剛性

ホイールを回転させると、ロータ部に発生する大きな角運動量の影響を受けて、特に回転軸に直交する方向回りの回転モードであるロッキング（首振り）モードが、回転数の増加に伴って上下2つの共振周波数に分離する（図 V-2 参照）。

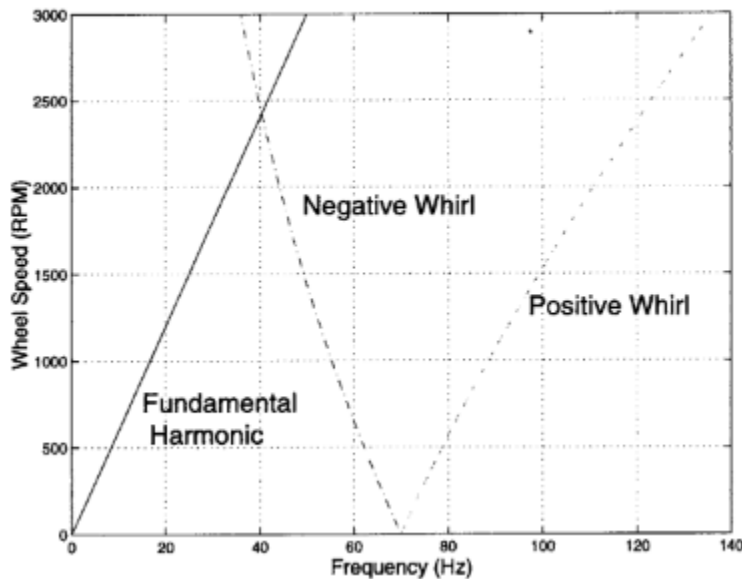


図 V-2 ホイールの固有振動数と回転数の関係 [V-1]

この回転に起因する周波数は、ジャイロモーメントによる振れまわり振動であり、回転体の運動方程式と振れまわり振動から次の解が得られる。以下にロッキングモードが固有振動数の分離について考察する。自由振動において、動不釣合がない場合の運動方程式は、(V-5) 式で $F=0$ とした

$$\begin{bmatrix} I_{rr} & 0 \\ 0 & I_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & I_{zz} \\ -I_{zz} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\theta} & 0 \\ 0 & k_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{V-6}$$

に対して、次のように Laplace 変換して固有値を求める。

$$\begin{bmatrix} s^2 I_{rr} + k_\theta & s\Omega I_{zz} \\ -s\Omega I_{zz} & s^2 I_{rr} + k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-7})$$

上式の特性方程式は以下のようなになる。

$$(s^2 I_{rr} - is\Omega I_{zz} + k_\theta)(s^2 I_{rr} + is\Omega I_{zz} + k_\theta) = 0 \quad (\text{V-8})$$

従って、正の固有振動数のみを選ぶと、ロッキングモードの固有振動数は、

$$\omega_p = \pm \frac{I_{zz}\Omega}{2I_{rr}} + \sqrt{\left(\frac{I_{zz}\Omega}{2I_{rr}}\right)^2 + \frac{k_\theta}{I_{rr}}} \quad (\text{V-9})$$

ここで、 Ω は回転数である。

回転数0の時のロッキングモードの固有振動数を $\omega_0 = \sqrt{k_\theta/I_{rr}}$ 、 $I_{zz}/I_{rr} \approx 2$ とすると、周方向の前進ロッキングモード (forward precession または positive whirl) 周波数が

$$\omega_{pb} = +\Omega + \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2} \quad (\text{V-10(a)})$$

となり、周方向の後退ロッキングモード (backward precession または negative whirl) 周波数が、

$$\omega_{pb} = -\Omega + \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2} \quad (\text{V-10(b)})$$

となる。教科書によっては、負の固有振動数を定義し ω_{pb} と鏡像関係にある以下のモードを後退のロッキングモードとしている。

$$\omega_{pb} = +\Omega - \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2}$$

(V-10)式は回転数が0の時、固有振動数が ω_0 となり、回転数が大きくなると positive whirl のモードの固有振動数が増加し、negative whirl の固有振動数は減少する。

構造共振の一般的な扱い

ベアリングノイズ等の発生する擾乱は、不釣り合い等のように大きさを直接測定することは難しい。しかしながらこれらの擾乱についても、構造共振は発生する。ここでは、ベアリングノイズ等も、不釣り合いによる擾乱と同様、回転数の2乗に比例し、回転数の h_i 倍の周波数の擾乱を発生すると仮定し、以下のようなモデルを設定した。

$$m(t) = \sum_{i=1}^n C_i \Omega^2 \sin(h_i \Omega t)$$

ここで、 Ω はホイール回転数。 h_i はホイール回転数の倍数(回転数のハーモニクス数)、 C_i は擾乱の大きさへの係数である。

それぞれの h_i に対する C_i の値は、実測等により決定される。また、 $h_i = 1$ の時は C_i は静的及び動的な不釣り合い量になる。

これらの擾乱が回転する構造体への外力として作用すると仮定すると、運動方程式は以下のようなになる。(ラジアル並進変位 x 、回転変位 θ に関する運動方程式。 y 、 φ に関する運動方程式は省略)

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -U_s\Omega^2 \sin(\Omega t) - \sum_{i=2}^n C_i\Omega^2 \sin(h_i\Omega t) \quad (\text{V-11})$$

$$I_{rr}\ddot{\theta} + cd^2\dot{\theta} + \Omega\dot{\phi} + kd^2\theta = U_d\Omega^2 \cos(\Omega t) + \sum_{i=2}^n C_i\Omega^2 \cos(h_i\Omega t)$$

上式で、 $h_i = 1$ の時は $C_i=U_s$ 、または U_d とする。 $\omega_i = h_i\Omega$ として、 x, y, θ, ϕ について解くと、以下のようになる。

i) 並進

$h_i\Omega = \omega_i$ に対する特解を以下のようにおく(減衰項を有する一般解も存在するが、定常状態では減衰しているとし、 ω_i なる周波数で励振される特解のみに着目する)。

$$x_{pi}(t) = \bar{A}_i \sin(h_i\Omega t) + \bar{B}_i \cos(h_i\Omega t) \quad (\text{V-12})$$

$$y_{pi}(t) = \bar{C}_i \sin(h_i\Omega t) + \bar{D}_i \cos(h_i\Omega t)$$

(V-15)式の並進の運動方程式に(V-16)を代入し、以下の特性方程式をえる。

$$\begin{bmatrix} k - (h_i\Omega)^2 M_t & -h_i\Omega c & 0 & 0 \\ h_i\Omega c & k - (h_i\Omega)^2 M_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k - (h_i\Omega)^2 M_t & -h_i\Omega c \\ 0 & 0 & h_i\Omega c & k - (h_i\Omega)^2 M_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{A}_i \\ \bar{B}_i \\ \bar{C}_i \\ \bar{D}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -C_i\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ C_i\Omega^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-13})$$

上式を解いて、(V-13)式の係数 $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i$ を求めると、

$$x_{pi}(t) = \frac{C_i\Omega^2}{M_t} \frac{1}{(\varpi_i^2 - \omega_T^2) + (2\varpi_i\xi_T\omega_T)^2} [(\varpi_i^2 - \omega_T^2) \sin(\varpi_i t) + 2\varpi_i\omega_T\xi_T \cos(\varpi_i t)]$$

$$y_{pi}(t) = \frac{C_i\Omega^2}{M_t} \frac{1}{(\varpi_i^2 - \omega_T^2) + (2\varpi_i\xi_T\omega_T)^2} [2\varpi_i\omega_T\xi_T \sin(\varpi_i t) - (\varpi_i^2 - \omega_T^2) \cos(\varpi_i t)] \quad (\text{V-14})$$

x_{pi}, y_{pi} はそれぞれ*i*番目のハーモニクスに対応する X、Y 方向の並進変位である。

$$\omega_T^2 = \frac{k}{M_T}$$

$$\xi_T = c/(2\omega_T)$$

共振が発生する回転数は以下となる。

$$\varpi_i^2 = \omega_T^2(1 - 2\xi_T^2) \pm 2\xi_T\omega_T\sqrt{\xi_T^2 - 1} \quad (\text{V-15})$$

上式の符号の負は後退のロッキングモードに、また正は前進のロッキングモードに対応する。並進の振幅は以下となる。

$$x(t) = x_h(t) + \sum_{i=1}^n x_{pi}(t) \quad (\text{V-16})$$

$$y(t) = y_h(t) + \sum_{i=1}^n y_{pi}(t)$$

上式で減衰項を有する一般解は定常状態で

$$x_h(t) \rightarrow 0, y_h(t) \rightarrow 0$$

とする。また、並進擾乱は変位にバネ剛性をかけて、以下で求められる。

$$F_x(t) = kx(t) \quad (\text{V-17})$$

$$F_y(t) = ky(t)$$

ii) 回転

$h_i\Omega = \omega_i$ に対する特解を以下のようにおく(減衰項を有する一般解も存在するが、定常状態では減衰しているとし、 ω_i なる周波数で励振される特解のみに着目する)。

$$\theta_{pi}(t) = \bar{A}_i \sin(h_i\Omega t) + \bar{B}_i \cos(h_i\Omega t) \quad (\text{V-18})$$

$$\varphi_{pi}(t) = \bar{C}_i \sin(h_i\Omega t) + \bar{D}_i \cos(h_i\Omega t)$$

θ_{pi} 、 φ_{pi} は*i*番目のハーモニクスに対応する角変位

並進と同様に(V-15)式の回転の運動方程式に代入し、以下の特性方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} k_\theta - (h_i\Omega)^2 I_{rr} & -h_i\Omega c_\theta & 0 & -h_i\Omega^2 I_{zz} \\ h_i\Omega c_\theta & k_\theta - (h_i\Omega)^2 I_{rr} & h_i\Omega^2 I_{zz} & 0 \\ 0 & h_i\Omega^2 I_{zz} & k_\theta - (h_i\Omega)^2 I_{rr} & -h_i\Omega c_\theta \\ -h_i\Omega^2 I_{zz} & 0 & h_i\Omega c_\theta & k_\theta - (h_i\Omega)^2 I_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{A}_i \\ \bar{B}_i \\ \bar{C}_i \\ \bar{D}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -C_i\Omega^2 \\ C_i\Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-19})$$

(V-23)式は以下のような固有値を持ち、それぞれ前進、後退のロッキングモードの固有振動数に対応する。

$$\varpi_{ri} = h_i\Omega = \mp \frac{\Omega I_{zz}}{2I_{rr}} + \sqrt{\left(\frac{\Omega I_{zz}}{2I_{rr}}\right)^2 + \frac{kd_k^2}{I_{rr}}} \quad (\text{V-20})$$

上式の関係から後退、前進のロッキングモードの固有振動数はハーモニクスの関数となり以下のように表せる。

$$(\omega_{ri}^-)^2 = \frac{h_i k_\theta}{h_i I_{rr} + I_{zz}} \quad (\text{V-21})$$

$$(\omega_{ri}^+)^2 = \frac{h_i k_\theta}{h_i I_{rr} - I_{zz}}$$

ここで、 ω_{ri}^+ 、 ω_{ri}^- はそれぞれ前進、後退のロッキングモード固有振動数である。

同様にそれぞれのモードのダンピング比を以下のように定義する。

$$\xi_{ri}^- = \frac{h_i c_\theta}{2\omega_{ri}^- (h_i I_{rr} + I_{zz})} \quad (\text{V-22})$$

$$\xi_{ri}^+ = \frac{h_i c_\theta}{2\omega_{ri}^+ (h_i I_{rr} - I_{zz})}$$

ここで、 ξ_{ri}^+ 、 ξ_{ri}^- はそれぞれ前進、後退のロッキングモードのダンピング係数としてい
る。

上記のような関係を利用し、前進、後退のロッキングモードについて(V-19)式の係数
を求め、それぞれのモードの各変位を求めると、以下となる。

$$\begin{aligned}\theta_{pi}^+(t) &= \frac{\frac{h_i C_i \Omega^2}{h_i I_{rr} - I_{zz}}}{\{\varpi_i^2 - (\omega_{ri}^+)^2\}^2 + (2\varpi_i \xi_{ri}^+ \omega_{ri}^+)^2} [2\varpi_i \xi_{ri}^+ \omega_{ri}^+ \sin(\varpi_i t) - \{\varpi_i^2 - (\omega_{ri}^+)^2\} \cos(\varpi_i t)] \\ \varphi_{pi}^+(t) &= \frac{\frac{h_i C_i \Omega^2}{h_i I_{rr} - I_{zz}}}{\{\varpi_i^2 - (\omega_{ri}^+)^2\}^2 + (2\varpi_i \xi_{ri}^+ \omega_{ri}^+)^2} [2\{\varpi_i^2 - (\omega_{ri}^+)^2\} \sin(\varpi_i t) - \varpi_i \xi_{ri}^+ \omega_{ri}^+ \cos(\varpi_i t)]\end{aligned}\tag{V-23}$$

$$\begin{aligned}\theta_{pi}^-(t) &= \frac{\frac{h_i C_i \Omega^2}{h_i I_{rr} - I_{zz}}}{\{\varpi_i^2 - (\omega_{ri}^-)^2\}^2 + (2\varpi_i \xi_{ri}^- \omega_{ri}^-)^2} [2\varpi_i \xi_{ri}^- \omega_{ri}^- \sin(\varpi_i t) - \{\varpi_i^2 - (\omega_{ri}^-)^2\} \cos(\varpi_i t)] \\ \varphi_{pi}^-(t) &= \frac{\frac{h_i C_i \Omega^2}{h_i I_{rr} - I_{zz}}}{\{\varpi_i^2 - (\omega_{ri}^-)^2\}^2 + (2\varpi_i \xi_{ri}^- \omega_{ri}^-)^2} [2\{\varpi_i^2 - (\omega_{ri}^-)^2\} \sin(\varpi_i t) - \varpi_i \xi_{ri}^- \omega_{ri}^- \cos(\varpi_i t)]\end{aligned}\tag{V-24}$$

ここで、 θ_{pi}^+ 、 θ_{pi}^- 、 φ_{pi}^+ 、 φ_{pi}^- は*i*番目のハーモニクスに対応する前進、後退のロッキング
モードに対応する角変位 θ 、 φ である。

減衰項を有する一般解 $\theta_h(t)$ 等を含めて、角変位に対する完全解は以下となる。

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta_h(t) + \sum_{i=1}^n (\theta_{pi}^-(t) + \theta_{pi}^+(t)) \\ \varphi(t) &= \varphi_h(t) + \sum_{i=1}^n (\varphi_{pi}^-(t) + \varphi_{pi}^+(t))\end{aligned}\tag{V-25}$$

減衰項を有する一般解 $\theta_h(t)$ 、 $\varphi_h(t)$ は定常段階では、

$$\theta_h(t) \rightarrow 0, \varphi_h(t) \rightarrow 0$$

とし、回転擾乱は以下で求められる。

$$\begin{aligned}T_x(t) &= k_\theta \theta(t) \\ T_y(t) &= k_\theta \varphi(t)\end{aligned}\tag{V-26}$$

付録-V 参考文献

- [V-1] Masterson, R. A., “Development and Validation of Empirical and Analytical Reaction Wheel Disturbance Models”, MSc Thesis (SERC #4-99), Massachusetts Institute of Technology, 1999.

付録－VI スペクトル解析

信号処理の基本は、その信号にどのような周波数成分が含まれているかを知ることである。この周波数成分を調べる分析方法が周波数分析（スペクトル分析）と呼ばれる。

本章では周波数分析の基本である、フーリエ級数、フーリエ変換、離散フーリエ変換（DFT）、および離散フーリエ変換を計算機上で高速に実行するアルゴリズム、高速フーリエ変換（FFT）について解説する。なお、ここでは概要を説明するにとどめる。詳細は参考文献を参照されたい。

さらに、読者への利便性を図り、数値計算によるプログラム例を紹介する。

VI.1 スペクトル解析

VI.1.1 フーリエ級数

任意の周期信号（ここでは周期 T 秒で繰り返される信号とする）は、 T 秒で1周期とする基本角周波数 $\omega = 2\pi/T$ (rad/s)成分とその整数倍の角周波数成分 $n\omega$ の無限和で表すことができる。これを数式で表すと以下となり、フーリエ級数と呼ばれる。係数である a_n 、 b_n はフーリエ係数と呼ばれる。

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi nft + b_n \cos 2\pi nft) \quad (\text{VI.1.1-1})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(2\pi nft) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(2\pi nft) dt$$

なお、

$$f = \frac{1}{T}$$

フーリエ級数は複素数を用いるとより簡潔に表現できる。(VI.1.1-1)式は複素数を用いると以下式で表すことができる。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nft} \quad (\text{VI.1.1-2})$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i2\pi nft} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

なお、複素フーリエ係数 C_n と(VI.1.1-1)式のフーリエ係数 a_n 、 b_n との関係は以下となる。

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

周期信号が上述のように、(VI.1.1-1)(VI.1.1-2)式で表現されるとき、振幅、位相、パワーが以下のように定義される。

$$\text{振幅：} \quad |C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$$

$$\text{位相：} \quad \angle C_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

$$\text{パワー：} \quad |C_n|^2$$

VI.1.2 フーリエ変換

フーリエ級数の概念の拡張として、フーリエ変換（フーリエ積分）が定義される。

周期 T が大きくなるとフーリエ係数の周波数間隔 $\Delta f = 1/T$ は小さくなり、フーリエ係数の間隔は密になる。 $T \rightarrow \infty$ の極限ではフーリエ係数は周波数 f の連続関数となる。信号が絶対積分可能、すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ であれば、フーリエ変換は以下で定義される。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{VI.1.2-1})$$

$X(f)$ から $x(t)$ を求める式は以下で表され、逆フーリエ変換と呼ばれる。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad (\text{VI.1.2-2})$$

$X(f)$ は複素関数であり、絶対値 $|X(f)|$ 、偏角 ϑ_f により以下のように表現できる。

$$X(f) = |X(f)| e^{i\vartheta_f} \quad (\text{VI.1.2-3})$$

このとき、絶対値 $|X(f)|$ 、偏角 ϑ_f は以下のような性質をもつ。

$$|X(f)| = |X(-f)|$$

$$\vartheta_f = -\vartheta_{-f}$$

なお、ここまでは周波数 f [Hz]を用いてきたが、工学分野では角周波数 $\omega = 2\pi f$ [rad/s]が用いられることも多い。このとき、(VI.1.2-1)(VI.1.2-2)式は以下で表される。

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{VI.1.2-4})$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{VI.1.2-5})$$

フーリエ級数と同様に以下のように、振幅、位相、パワー（教科書によってはエネルギー）を定義することができ、それらは周波数の関数となる。また、周波数に対する振幅、位相、パワーの分布は、それぞれ、振幅スペクトル、位相スペクトル、エネルギースペクトルと呼ばれる。

- 振幅： $|X(f)|$ → 振幅スペクトル： f vs. $|X(f)|$
- 位相： $\theta_f = \angle X(f)$ → 位相スペクトル： f vs. θ_f
- パワー（エネルギー）： $|X(f)|^2$ → エネルギースペクトル： f vs. $|X(f)|^2$

ここで、時間領域表現 $x(t)$ と周波数領域表現 $X(f)$ を結びつける重要な公式として、以下のパーセバル(Parseval)の等式を挙げておく。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{VI.1.2-6})$$

なお、パワー（エネルギー）は、単位時間あたりの平均エネルギーをとってパワースペクトル密度関数 $P(f)$ が一般に用いられる。

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X(f)X^*(f) \quad (\text{VI.1.2-7})$$

ここで、 $X^*(f)$ は $X(f)$ である。

パワースペクトル密度関数は、自己相関関数のフーリエ変換にても求めることができる。次項のVI.1.3項にて説明する。

VI.1.3 相関関数とスペクトル

VI.1.2項までに信号解析にて重要な解析手法であるスペクトルを紹介したが、スペクトルと並んで信号解析でよく用いられる解析手法として相関関数が挙げられる。

自己相関関数とパワースペクトル密度関数（VI.1.2-6式）は、ウィーナー-ヒンチンの公式（あるいは定理）（Wiener-Khinchin Theorem）にてフーリエ変換対の関係にあることが知られている。また、その拡張として相互相関関数をフーリエ変換することによりクロススペクトル密度関数が定義される。以下、自己相関関数とパワースペクトル密度関数、相互相関関数とクロススペクトル密度関数を解説する。

(1) 自己相関関数とパワースペクトル密度関数

自己相関関数は、同一の時間波形 $x(t)$ に対して、ある時間 τ だけ隔たった $x(t+\tau)$ の相関を表わすものであり、以下式で定義される。

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt \quad (\text{VI.1.3-1})$$

自己相関関数は、以下の性質を有する。

$$C(\tau) = C(-\tau) \quad : \text{自己相関関数は偶関数である}$$

$$C(0) < |C(\tau)| \quad : \text{自己相関関数は } \tau = 0 \text{ で最大値をとる}$$

ウィーナー-ヒンチンの公式より、自己相関関数はパワースペクトル密度関数とフーリエ変換対の関係にあることが知られている。従って、自己相関関数はパワースペクトル密度関数の一方が求まれば、もう一方が求められる。

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (\text{VI.1.3-2})$$

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{VI.1.3-3})$$

なお、周波数 f [Hz] の代わりに、角周波数 $\omega = 2\pi f$ [rad/s] が用いたときの式も以下に示しておく。

$$C(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{VI.1.3-4})$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{VI.1.3-5})$$

(VI.1.3-2)~(VI.1.3-5)式では、周波数 f 及び角周波数 ω の定義域を $(-\infty, +\infty)$ としているが、負の周波数は物理的には存在しないため $(0, +\infty)$ とするのが自然である。このため、定義域を $(0, +\infty)$ として定義される場合も多く、注意を要する [VI. 2]。

$(0, +\infty)$ で定義されるパワースペクトル密度関数を片側パワースペクトル密度関数 (One-side Spectral Density Function)、 $(-\infty, +\infty)$ を両側パワースペクトル密度関数 (Two-side Spectral Density Function) と呼ばれる。

ここで、片側パワースペクトル密度関数 $E(f)$ を以下で定義する。

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} E(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (\text{VI.1.3-6})$$

一方、(VI.1.3-2)式と、(VI.1.2-6)式のパワースペクトラム密度関数の定義から $P(f)$ は実の偶関数であることを踏まえると

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{i2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^0 P(f) e^{i2\pi f\tau} df + \int_0^{\infty} P(f) e^{i2\pi f\tau} df \\ &= 2 \int_0^{\infty} P(f) e^{i2\pi f\tau} df \end{aligned} \quad (\text{VI.1.3-7})$$

(VI.1.3-6)式と(VI.1.3-7)式の比較より片側パワースペクトル密度関数 $E(f)$ と両側パワースペクトル密度関数 $P(f)$ は以下の関係であることが分かる。

$$E(f) = 2P(f) \quad (\text{VI.1.3-8})$$

(2) 相互相関関数とクロススペクトル密度関数

自己相関関数のフーリエ変換によりパワースペクトル密度関数が定義できたように、相互相関関数のフーリエ変換もスペクトルとして定義できる。それがクロススペクトル密度関数である。

相互相関関数 (Cross-Correlation Function)

相互相関関数は、2つの信号との相関を表わし、以下で定義される。

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t+\tau)dt \quad (\text{VI.1.3-9})$$

相互相関関数は、以下の性質を有する。

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$$

クロススペクトル密度関数 (Cross-Spectral Density Function)

クロススペクトル密度関数は以下で定義される。

$$P_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau)e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{VI.1.3-10})$$

また、上式の逆フーリエ変換より以下式が得られる。

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xy}(f)e^{i2\pi f\tau} df \quad (\text{VI.1.3-11})$$

クロススペクトル密度関数は以下の性質を有する。

$$P_{xy}(f) = P_{yx}^*(f)$$

$P_{yx}^*(f)$ は $P_{yx}(f)$ の複素共役である。

VI.1.4 離散フーリエ変換 (DFT)

これまではアナログ信号を対象としてきたが、以降はデジタル信号を扱う。

デジタル信号 $x_n = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ の離散フーリエ変換 (DFT) は以下式で定義される (アナログ信号に対する(8.1.2-1)式に相当する)。

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (\text{VI.1.4-1})$$

また、 X_n から信号 x_n を求める逆フーリエ変換は以下で与えられる。

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{i2\pi nk}{N}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (\text{VI.1.4-2})$$

なお、教科書によっては、(VI.1.4-1) (VI.1.4-2) 式と係数 $1/N$ が以下のように逆の場合がある。

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} \quad (\text{VI.1.4-3})$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{i2\pi nk}{N}} \quad (\text{VI.1.4-4})$$

両方でスペクトルの大きさが異なるので注意が必要である[VI. 7]。なお、 $x(t) = \sin(t)$ を離散フーリエ変換した際に、線スペクトルの大きさが1となるのは(VI.1.4-1)式である[VI. 4]。

ここで、 X_n は複素数であり、振幅スペクトル、位相スペクトル、エネルギースペクトルはアナログ信号の複素フーリエ変換と同様に以下のように定義される。

- ・振幅： $|X_n|$ → 振幅スペクトル： f vs. X_n
- ・位相： $\angle X_n$ → 位相スペクトル： f vs. $\angle X_n$
- ・パワー（エネルギー）： $|X_n|^2$ → エネルギースペクトル： f vs. $|X_n|^2$

なお、位相については、既出(6.3.1.1項)の(6.3.1.1-5)式に示すように、なお、基準周波数 f_b の位相 $\theta(f_b)$ からの相対偏角 $\Delta\theta(f)$ で定義すると扱いやすい。

$$\Delta\theta(f) = \theta(f) - \theta(f_b) \quad (\text{6.3.1.1-5 再出})$$

VI.1.4.1 高速フーリエ変換 (FFT)

高速フーリエ変換 (FFT) は 1965 年にクーリー (Cooley) とターキー (Turkey) により離散フーリエ変換を高速に実行するための提案されたアルゴリズムであり、関数 $e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} = \cos\{nk(\frac{2\pi}{N})\} - i \sin\{nk(\frac{2\pi}{N})\}$ の周期性を利用することで、計算回数を省略することができる。

データ数が $N=2^m$ のとき、乗算回数は、DFT が N^2 回に対して、FFT は $2Nm$ 回と、 N が大きいほど高速化する。詳細は文献[VI. 1][VI. 5]もしくは信号解析、数値解析の教科書を参照されたい。

VI.1.5 スペクトル計算

VI.1.1～VI.1.4 項までの解析手法により、アナログ/デジタル信号のスペクトル計算を行う準備は整った。ここでは、パワー (クロス) スペクトル密度関数の計算手法について若干補足した後、有限個の離散データからスペクトルを計算する際の誤差について解説する。

VI.1.5.1 パワー（クロス）スペクトル密度関数の計算手法

パワー（クロス）スペクトル密度関数の計算手法は、大きく、(VI.1.2-6)式の定義式に基づく直接的な方法と、ウィーナー・ヒンチン（Wiener-Khinchin）の公式に基づき、自己（相互）相関関数をフーリエ変換して、求める方法に分けられる。

従来は、後者の代表的な方法である Blackman-Tukey 法がほぼ唯一の実用法であったが、1965年に Cooley と Tukey が FFT のアルゴリズムを発表して以来、前者の直接的方法がよく用いられるようになった。

VI.1.5.2 スペクトル誤差

フーリエ変換は信号が「連続的」かつ「無限時間」を前提としているが、実際の信号計測においては、センサからの信号を A/D 変換して取り込んだ「離散的」かつ「有限時間」のデータ列である。このため、スペクトル誤差の要因となるいくつかの問題が生じる [VI. 4]。

(1) エイリアシングとサンプリング定理

時間間隔 T_s でサンプリングしたとき、サンプリング周波数の半分 $1/(2T_s)$ （ナイキスト周波数と呼ばれる）以上の周波数成分が存在すると、ナイキスト周波数を中心に折り返され、本来存在しない成分がナイキスト周波数以下の周波数域に現れる。これをエイリアシング (aliasing) と呼ぶ。

エイリアシングの影響を防止するために、信号計測においては以下の処置を行う。

- ・サンプリング周波数 f_s を信号に含まれる（もしくは解析対象とする）最高周波数 f_h の2倍より大きい値に設定する。（サンプリング定理）

$$f_s > 2f_h$$

- ・サンプリング定理を満足することが難しい場合は、サンプリングの前にローパスフィルターでナイキスト周波数（サンプリング周波数の1/2）以上の成分を除去する。このようなローパスフィルターをアンチエイリアシングフィルターと呼ぶ。

(2) リークエッジ誤差と窓関数

DFT あるいは FFT では、離散データ系列は周期信号とし、切り出した信号の前後と同じデータ系列が繰り返されていると仮定している。しかしながら、一般には事前にそのデータ系列に含まれる信号の周期は不明であり、測定時間と信号の周期に不一致（信号周期の非整数倍）が生じる。このとき、スペクトルの大きさは減少し、正しいスペクトルの近傍に本来存在しないスペクトルが現れる。これをリークエッジ誤差（漏れ誤差、leakage error）と呼ぶ。

リーケージ誤差を抑えるためには一般に以下の処置がとられる。

・窓関数

リーケージ誤差の要因は測定時間と信号の周期に不一致（信号周期の非整数倍）にあり、このため切り出した信号の前後で信号が不連続となり、不連続の影響（Gibbs 現象）によりスペクトル誤差が生じる。従って、切り出した信号の前後の不連続を無くし、なるべく滑らかに繋げれば良い。

窓関数は、切り出した信号の前後が徐々に“零”となる重みを掛ける重み関数である。窓関数はいくつか提案されており、代表的なものとして表VI.1-1 窓関数が存在する。ランダムを含む一般波形に **Hanning** 窓、**Hamming** 窓が良く用いられる。振幅を正確に求めたい場合は **Flattop** 窓が用いられる。

なお、窓関数は信号を歪ませ、スペクトルの精度に一定の影響を及ぼす。窓関数はその特徴や影響を踏まえて選択すること。また、**FFT** の後に、窓関数を掛けたことによるパワーの増減を補償することを忘れないようにする。

表VI.1-1 代表的な窓関数とその特徴[VI. 1]

窓関数	表現（*）	特徴
方形窓	$W(n) = 1$	不連続点の処理は行わず、リーケージ誤差は最大となる。
Hanning 窓	$W(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	主成分から少し離れた、小さな成分の検出に適している。最も良く使用される窓関数である。
Hamming 窓	$W(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	Hanning 窓の改良として提案され、 Hanning 窓と同様に良く使用される。周波数分解能が良い。
Blackman-Harris 窓	$W(n) = 0.423 - 0.498 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.0792 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$	Hanning 窓とほぼ同様の使い方に適している。
Flattop 窓	$W(n) = 0.216 - 0.417 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.277 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) - 0.084 \cos\left(\frac{6\pi n}{N-1}\right) + 0.007 \cos\left(\frac{8\pi n}{N-1}\right)$	スペクトルの頂上部がフラットなため Flattop 窓関数と呼ばれる。線スペクトルの振幅を正しく求めるのに適している。係数は教科書により異なり、左記は計算ツールである MATLAB より引用した[VI.8]。

(*) : $0 \ll n \leq N-1$ とする。 $n \geq N$ では $W(n) = 0$

測定時間と信号の周期を一致させることができれば、正確なスペクトルが求められる。事前の結果をみて、改めて測定時間と信号の周期が一致するよう、適切なサンプリング周期にて計測すると良い。

但し、一般には測定器類においてサンプリング周期を細かく設定することは難しく、この方法は採用できない。しかしながら、回転機器にて回転速度を細かく調整できれば、その信号周期がサンプリング周期の整数倍となる条件を満足できる場合があり、この場合、正確なスペクトルを求めることができる^[VI.4]。

VI.2 スペクトル解析プログラム例

ここでは、6.3.1 項周波数領域表現で紹介した以下のスペクトルを計算するプログラムの例を示す。

プログラム言語は数値計算ツールとして普及している MATLAB とするが、MATLAB と互換性を有し、オープンソースとして入手可能な Scilab や Octave 等のプログラム言語でも、若干の修正を施して使用可能である。それぞれのプログラム言語については、参考文献に示す公式ホームページを参照されたい。

高速フーリエ変換 (FFT) によるパワースペクトル密度 (PSD) 推定 (6.3.1.1 項(4))

```
function [Psd_ave] = psd_average(signal, dt, t_ave, Nfft, overlap, win)
%直接法に基づく、パワースペクトル密度推定

%変数説明
%Psd_ave : 片側パワースペクトル密度 [U2/Hz]
%signal : 信号データ
%dt : サンプリング時間
%t_ave : 平均化区間
%Nfft : FFTデータ数
%Overlap : 平均化区間のオーバーラップ率 (0~1)
%win : 窓関数

%PSD推定 (直接法) (片側スペクトル密度であることに注意)
n_sig = length(signal) ;
n=fix(t_ave/dt) ;
n_average = fix((n_sig-overlap*n)/(1-overlap)/n) ;

Psd_oneside=zeros(1, Nfft/2+1) ;
Psd_ave=zeros(1, Nfft/2+1) ;
%
for k = 1:n_average
    n_begin = (k-1)*(1-overlap)*n+1 ;
    x = signal(n_begin:(n_begin+n-1), 1) ;
    x = x.*win ;
    fft_sig = abs(fft(x', Nfft)) ;
    Psd_oneside(1, 1)=(fft_sig(1, 1)*dt)2/t_ave ;
    Psd_oneside(1, Nfft/2+1)=(fft_sig(1, Nfft/2+1)*dt)2/t_ave ;
end
```

```

    for j=2:Nfft/2
        Psd_oneside(1, j)=2*(fft_sig(1, j)*dt)^2/t_ave;
    end
    Psd_ave = Psd_ave + Psd_oneside ;
    %
end
%
Psd_ave=Psd_ave/n_average;

%窓関数のパワーロスを補正
Power_win=0;
for i=1:Nfft
    Power_win=Power_win+win(i)^2;
end
Psd_ave=Psd_ave/(Power_win/Nfft);

```

特定周波数域のパワー(6.3.1.1 項(5))

```

function [RMS_ave] = rms_average(Psd_ave, Fs, Nfft)
%特定周波数域のパワー

%変数説明
%RMS_ave : 特定周波数域のパワー[U(r. m. s.)]
%Psd_ave : 片側パワースペクトル密度 [U^2/Hz]
%Fs ; サンプリング周波数
%Nfft:FFTデータ数
%df : 周波数分解能[Hz]

df=Fs/Nfft;
RMS_ave=sqrt(Psd_ave*df);

```

付録－VI 参考文献

- [VI.1] 江原 義郎著, ユーザーズ デジタル信号処理, 東京電機大学出版局, 1991 年
- [VI.2] 日野 幹雄著, スペクトル解析, 朝倉書店, 1977 年
- [VI.3] J.S.ベンダット, A.G.ピアソル共著, 得丸 英勝訳, ランダムデータの統計的処理, 培風館, 1976 年
- [VI.4] 山本 敏男, 石田 幸男共著, 回転機械の力学, コロナ社, 2001 年, 12 章 計測と信号処理
- [VI.5] D.E.ニューランド著, 不規則振動とスペクトル解析, オーム社, 1991 年
- [VI.6] 日本音響学会編, 金井 浩著, 音・振動のスペクトル解析, コロナ社, 1999 年
- [VI.7] 小松 敬治著, 機械構造振動学 MATLAB による有限要素法と応答解析, 森北出版, 2009 年, 10 章 周波数応答関数とランダム応答
- [VI.8] The MathWorks, Inc., MATLAB ヘルプセンター
<https://jp.mathworks.com/help/signal/ref/window.html>
(2026 年 2 月 17 日アクセス)

数値計算ツール公式ホームページ (2026 年 2 月 17 日アクセス)

MATLAB : <https://jp.mathworks.com/>

Scilab : <https://www.scilab.org/>

Octave : <https://octave.org/>